

## Der $\Delta\alpha$ -Effekt.

Von REINHARD SCHULZE.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 28. Juni 1954.)

1. Aus dem metallurgisch-ferromagnetischen Gebiet kennen wir zwei interessante Erscheinungen mit zum Teil erheblicher Bedeutung für die Praxis [1]. Das ist einmal der  $\Delta E$ -Effekt, bei dem eine elastische Spannung  $\sigma$  neben einer rein elastischen Dehnung eine magnetostriktiv bedingte Dehnung verursacht, wodurch der Elastizitätsmodul  $E$  für geringe elastische Spannungen kleiner erscheint als im Gebiet der magnetostriktiven Sättigung.

Als zweite Erscheinung ist der *Invareffekt* zu nennen, der den kleinen Wärmeausdehnungskoeffizienten von  $1,2 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  bei einer Eisennickellegierung mit 36% Ni erklärt. Eine Temperaturerhöhung bewirkt hier außer der rein thermischen Ausdehnung eine Schwächung der einzelnen Magnetisierungsvektoren; infolge stark positiver Volummagnetostriktion zieht sich das Material dabei — der thermischen Ausdehnung entgegenwirkend — zusammen.

Die im folgenden beschriebenen Untersuchungen lassen erkennen, daß beiden Erscheinungen ein mit denselben Vorstellungen erklärbares *drittes Phänomen* zur Seite zu stellen ist.

2. Mit zunehmender Verfeinerung der Meßmethoden wachsen die Forderungen nach Federmaterial mit extrem konstanten Eigenschaften. Als Werkstoff mit sehr geringem thermoelastischem Koeffizienten empfiehlt sich neben Elinvar und Ni-Span C das in den USA stark verbreitete Iso-Elastic.

Iso-Elastic ist ein Spezialstahl mit 36% Ni, 7–8% Cr, 0,5% Mo und Spuren von anderen Elementen; in amerikanischen Veröffentlichungen [2] wird besonders der hohe Grad von Kaltbearbeitung — Dehnen und Walzen sowie „anderen Spezialprozessen“ — hervorgehoben. An einer Feder aus diesem Material wurden mit feinsten Meßmethoden eingehende Untersuchungen durchgeführt. Die Feder hatte in unbelastetem Zustand  $w = 11,2$  Windungen mit einem Radius von  $r = 10,7$  mm und einem rechteckigen Querschnitt mit  $b = 3$  mm und  $h = 0,5$  mm; sie wurde mit Drehmomenten  $M$  bis  $\pm 500 \text{ cm} \cdot p$  belastet. Der sich einstellende Torsionswinkel  $\varphi$  wird angegeben mit

$$\varphi = \frac{12 \cdot M \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3} \quad (1)$$

(mit  $l = 2\pi \cdot r w$ ); durch Differentiation ergibt sich daraus bei konstantem Drehmoment als temperaturbedingte Torsionswinkeländerung

$$\frac{d\varphi}{dT} = (-3\alpha - \eta) \cdot \varphi, \quad (2)$$

wobei  $\alpha$  den Wärmeausdehnungskoeffizienten und  $\eta = \frac{1}{E} \frac{dE}{dT}$  den thermoelastischen Koeffizienten bedeuten.

Die Feder wurde einmal zutordierend ( $M$  und  $\varphi$  positiv), das anderemal aufordierend ( $M$  und  $\varphi$  negativ) belastet. Für  $\frac{d\varphi}{dT}$  ergab sich dabei eine bemerkenswerte Diskrepanz, die sich zunächst nicht erklären ließ. Es zeigte sich weiterhin, daß sich auch in völlig unbelastetem Zustand ( $M = 0$ ,  $\varphi = 0$ ) die Feder bei Erwärmung von 25 auf  $35^\circ\text{C}$  um einen Winkel von  $4,86 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$  aufdreht, was nach (2) ausgeschlossen erscheint.

3. Unter den Versuchen zur Deutung dieses Ergebnisses wurde die Möglichkeit erwogen, daß der thermische Ausdehnungskoeffizient in Längsrichtung des Federbandes kleiner ist als in Querrichtung, also

$$\alpha_q - \alpha_l = \Delta\alpha > 0.$$

Die Frage ist, ob unsere Aussage physikalisch sinnvoll und im vorliegenden Fall möglich ist.

Eine Richtungsabhängigkeit infolge kristalliner Ausrichtung scheint auszuschließen, da bei den fraglichen Eisennickellegierungen austenitische, d. h. flächenzentriert kubische Struktur vorliegt [2]. Eine andere Möglichkeit ist das Vorhandensein von magnetischen Vorzugsrichtungen durch Dehnen und Walzen des Materials. In einem derartigen Fall würde, ähnlich wie beim Invareffekt, mit der Erwärmung eine Entmagnetisierung verbunden sein; durch magnetostriktive Wirkung resultiert daraus eine richtungsabhängige Längenänderung, die sich der rein thermischen überlagert.

Tatsächlich sind derartige magnetische Vorzugsrichtungen in gewalzten Nickeleisenblechen beobachtet worden [1]. (Innere Spannungen können allerdings nicht dafür verantwortlich gemacht werden, da diese sich über den gesamten Querschnitt aufheben müssen; anderenfalls wäre kein Gleichgewichtszustand möglich. „Man muß vielmehr“ — wörtlich zitiert aus [1] — „annehmen, daß durch das Fließen der Kristallite beim Walzen eine Abweichung in der Anordnung der Ni- und Fe-Atome von der statistischen Verteilung hervorgerufen wird. Die Folge ist, daß nachher der Kristall im spannungsfreien Zustand nicht mehr genau kubisch, sondern ein wenig tetragonal verzerrt ist, genauso wie es eine Zugspannung parallel zur Vorzugsrichtung bewirken würde.“)

Somit erscheint die Möglichkeit, daß in unserem Fall  $\alpha_q \neq \alpha_l$ , nicht nur sinnvoll und wahrscheinlich, sondern nahezu zwingend. Die Gleichungen (1) und (2) sind aber dann offensichtlich unvollständig; in (2) ist ein Zusatzglied nötig, damit  $\frac{d\varphi}{dT}$  für  $\varphi = 0$  nicht verschwindet. Eine einfache Überlegung liefert

$$\frac{d\varphi}{dT} = (\alpha_l - 4\alpha_q - \eta) \cdot \varphi - (2\pi w + \varphi) \cdot \Delta\alpha.$$



Bei  $T = 30^\circ\text{C}$  und  $M = 0$  erhält man in unserem Fall

$$\Delta\alpha = 0,69 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}.$$

Eine experimentelle Bestätigung von anderer Seite ist in einer amerikanischen Veröffentlichung über Glas-Metall-Einschmelzungen aus dem Jahre 1934 zu finden [3]. Dort ist der Ausdehnungskoeffizient von Dumet (Nickel-eisenlegierung mit 42% Ni + Kupfermantel) angegeben

in axialer Richtung mit  $6,5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  
in radialer Richtung mit  $9,2 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$

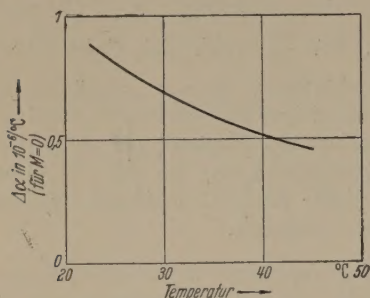


Abb. 1. Die Temperaturabhängigkeit von  $\Delta\alpha$  bei Drehmoment  $M = 0$ .

(Mittelwerte aus Messungen an 4 verschiedenen Proben). Für den großen Unterschied wurde in der amerikanischen Arbeit keine Deutung versucht. Die Berücksichtigung der Ausdehnung des Kupfermantels würde nur eine Differenz von  $0,2 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$  erklären.

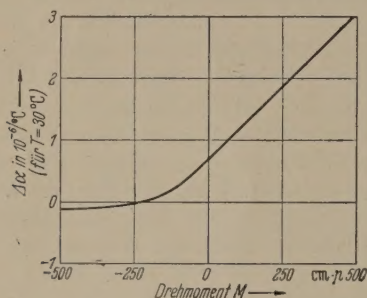


Abb. 2. Einfluß der elastischen Beanspruchung auf  $\Delta\alpha$  bei  $T = 30^\circ\text{C}$ .

4. Interessant ist die Frage nach der *Temperatur- und der Belastungsabhängigkeit* von  $\Delta\alpha$ .

Der Temperatureinfluß, der nur in einem sehr kleinen Bereich beobachtet wurde, erwies sich — entsprechend dem niedrigen Curiepunkt der Legierung — als sehr groß. Abb. 1 zeigt das Absinken von  $\Delta\alpha$  mit steigender Temperatur.

Die Abhängigkeit von der elastischen Beanspruchung, also vom belastenden Drehmoment, veranschaulicht Abb. 2. Mit wachsendem  $M$  wird das Material in steigendem Maße auf Zug beansprucht; die Magnetisierungsvektoren der Einzelbezirke sind in immer größerer Zahl in Federlängsrichtung umgeklappt, können also bei Temperaturanstieg auch in größerer Zahl aus ihrer geordneten Lage gebracht werden:  $\Delta\alpha$  wächst. (Dem Kurvenverlauf von Abb. 2 darf keine allzu große Genauigkeit zugeschrieben werden, da über die Belastungsabhängigkeit von  $\eta$ , die bei der Auswertung mit eingeht, nur Annahmen möglich waren.)

5. Die Theorie des  $\Delta\alpha$ -Effektes läßt sich analog der des Invar-effektes [1] aufstellen. Die Länge des ma-

gnetostriktiv arbeitenden Materials hängt von der Temperatur und der Magnetisierung  $m$  ab:

$$l = l(T, m). \quad (3)$$

Statt  $m$  soll im folgenden die Spannung  $\sigma$  eingesetzt werden, die die gleiche magnetische Ausrichtung hervorrufen würde. Dabei setzt sich  $\sigma$  zusammen aus der äußeren und einer inneren, eingepprägten Spannung, wobei diese der magnetischen Ausrichtung in unbelastetem Zustand entspricht. Aus (3) wird dann  $l = l(T, \sigma)$ . Daraus folgt als Temperatureinfluß bei konstanter magnetischer Ordnung

$$\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_m = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_\sigma + \left(\frac{\partial l}{\partial \sigma}\right)_T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_m.$$

Entsprechendes gilt für  $h$ . Wegen

$$\frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_m = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_m \quad \text{und} \quad \Delta\alpha = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_\sigma - \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_\sigma$$

erhält man

$$\Delta\alpha = \left[ \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial \sigma}\right)_T - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial \sigma}\right)_T \right] \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_m. \quad (4)$$

Über die einzelnen Größen läßt sich folgendes aussagen:

$\frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial \sigma}\right)_T$  ist bei positiver Magnetostraktion positiv; eine positive (Zug-)Spannung  $\sigma$  vergrößert  $l$ .  
 $\frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial \sigma}\right)_T$  ist negativ, denn Längsausrichtung führt zu Höhenverkürzung.

$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_m$  ist belastungsabhängig; bei Zug positiv, bei Druck negativ: Steigende Temperatur will die magnetische Ordnung zerstören; soll diese — wie der Index fordert — konstant bleiben, so muß der Absolutbetrag der Spannung vergrößert werden.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich somit bei vorhandener innerer Spannung ein von Null verschiedenes  $\Delta\alpha$  bei verschwindender äußerer Belastung; der Anstieg mit der Belastung wird ebenfalls durch (4) erklärt.

#### Zusammenfassung.

Untersuchungen an Federn aus Iso-Elastic ergaben, daß der wirksame Wärmeausdehnungskoeffizient in Längsrichtung des gewalzten Materials kleiner ist als der in Querrichtung. Die Erklärung dieser Erscheinung,  $\Delta\alpha$ -Effekt genannt, beruht auf dem Vorhandensein einer magnetischen Vorzugsrichtung, hervorgerufen durch starkes Dehnen und Walzen; Erwärmung bewirkt Entmagnetisierung, wodurch bei magnetostraktiv arbeitendem Material Längenänderungen auftreten, die sich den rein thermischen Ausdehnungen überlagern. Daß ein derartiger Effekt bei jedem ferromagnetischen Material mit von Null verschiedener Magnetostraktion und mit eingepprägter magnetischer Vorzugsrichtung auftritt, kann nach den angedeuteten theoretischen Erwägungen als sicher gelten.

**Literatur.** [1] BECKER, R. und W. DÖRING: Ferromagnetismus. Springer 1939. — [2] The properties and application of Wilco-Ni-Span C constant modulus alloy, Wilco-Eng. Date-Bulletin, März 1946. — [3] HULL, A. W. und E. E. BURGER: Glass-to-metal seals, Physics 1934, S. 396.

Askania-Werke, Berlin-Friedenau.

Dr.-Ing. REINHARD SCHULZE, Berlin-Friedenau,  
Homuthstr. 7.



## Ein abgeschirmtes homogenes Magnetfeld.

Von ERNST-GÜNTHER SCHLOSSER, Frankfurt/M.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 3. Juli 1954.)

Zur Erzeugung von in größeren Bereichen praktisch homogenen magnetischen Feldern, deren Stärke sich leicht meßbar verändern läßt, benutzt man seit langem das sog. HELMHOLTZfeld, das aus zwei gleichen, vom selben Strom durchflossenen Kreisspulen erzeugt wird, die auf gleicher Achse im Abstand ihres Radius  $R$  einander gegenüberstehen. Das axiale Feld im Mittelpunkt dieser Anordnung beträgt

$$\tilde{H}_{00} = 0,716 \cdot \frac{0,4 \pi J n}{R}, \quad (1)$$

wobei  $J$  der Spulenstrom und  $n$  die Windungszahl der Einzelspule ist. Zur Verbesserung der Homogenität kann man mehrere solcher Doppelkreise übereinander anordnen in der Weise, daß zwischen den Radien der einzelnen HELMHOLTZpaare gewisse Beziehungen bestehen, oder man kann zwei konisch gewickelte Spulen bei denen die Tangente des Winkels zwischen Mantellinie und Achse gleich 2 ist, mit den engeren Enden gegeneinander richten, so daß sie sich im Abstand des Radius der innersten Windung befinden. Als Kriterium der Homogenität des Zentralfeldes wird das Verschwinden der Ableitungen des Achsialfeldes in Achsenrichtung im Mittelpunkt der Anordnung bis zu möglichst hoher Ordnung betrachtet. So verschwinden beim einfachen HELMHOLTZpaar die Ableitungen bis zur 3. Ordnung, bei den komplizierter gebauten Anordnungen je nach Grad der Kompliziertheit noch höhere Ordnungen.

Benötigt man Meßfelder, die nicht mehr als stark gegen das Erdfeld oder sonstige Störfelder zu betrachten sind, so muß man diese durch besondere Maßnahmen in der Gegend des Meßfeldes unwirksam machen. Als solche können zusätzliche HELMHOLTZfelder, die entgegengesetzt der Richtung der Störfelder orientiert sind und diese kompensieren, oder Abschirmungen genannt werden. Erstere Methode ist umständlich zu handhaben, besonders wenn sich das Störfeld bezüglich Richtung und Größe häufig ändert, also das Kompensationsfeld ständig nachjustiert werden muß, was vorwiegend bei empfindlichen Messungen zu Fehlern Anlaß geben kann. Diesen Umstand umgeht man durch Verwendung hochpermeabler Abschirmungen, mit denen man jedoch aus Gründen der Materialersparnis nicht in notwendigerweise hinreichend großem Abstand das Meßfeld umhüllen kann. Bringt man die Abschirmung zu dicht an das Meßfeld heran, so verstärkt man dieses einerseits in unkontrollierbarer Weise, d. h. man kennt nicht mehr den genauen Zusammenhang zwischen Feld und erzeugendem Strom, weil ja ein Teil der Feldlinien statt in Luft im hochpermeablen Schirm verläuft, das Luftfeld also stärker zur Geltung kommt, andererseits besteht die Gefahr, das Meßfeld bei ungeschickter Wahl der Abschirmung zu verzerren.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie eine einfache Spulenanordnung mit Abschirmung zweckmäßig zu dimensionieren ist, so daß der Schirm gerade die Homogenität des Feldes verbessert, und welcher Zusammenhang zwischen dem Axialfeld im Mittelpunkt

der Anordnung und dem erzeugenden Strom in diesem Falle besteht.

Die Anordnung besteht aus einem Kreisspulenpaar, ähnlich der HELMHOLTZschen Anordnung (Abb. 1).

Der Radius der Spulen sei  $R$ , ihr Abstand  $a$ . Sie tragen je  $n$  Windungen, werden von Strom  $J$  gleichsinnig durchflossen und befinden sich symmetrisch in einem zylindrischen, beiderseits durch Deckel abgeschlossenen Abschirmbecher, dessen lichter Radius auf 1 normiert angenommen wird, dessen innere Länge  $b$  ist. Um die mathematische Behandlung des Problems zu ermöglichen, wird der Wickelquerschnitt der Spulen vernachlässigbar klein gegen die sonstigen Dimensionen und die Permeabilität der Abschirmung praktisch unendlich angenommen, woraus folgt, daß die Wandstärke derselben nicht in die Rechnung eingeht.

Der Lösung des Problems ist ein Zylinderkoordinatensystem  $(r, z)$  am besten angepaßt, das man mit seiner  $z$ -Richtung in die Spulenchsenrichtung legt. Wegen der Rotationssymmetrie tritt keine Winkelabhängigkeit auf. Die mathematische Lösung erfolgt in einzelnen Schritten. Es wird zunächst das Feld einer Einzelspule vom Radius  $R$  in einem unendlich langen Abschirmrohr (Radius = 1,  $\mu = \infty$ ) bestimmt (Abb. 2). Sie befinde sich bei  $z = 0$ .

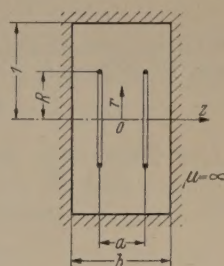


Abb. 1. Anordnung des Spulenpaares in der Abschirmdose (schematisch).

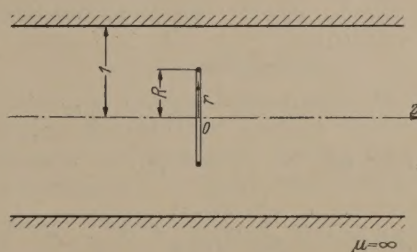


Abb. 2. Einzelspule im Abschirmrohr (schematisch).

Das Magnetfeld  $(H_z, H_r)$  bestimmt sich aus dem magnetischen skalaren Potential  $\varphi_{(z,r)}$ , für das die LAPLACESche Gleichung gilt<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} H_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ H_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(2) wird gelöst durch den Produktansatz:

$$\varphi = Z_{(z)} \cdot P_{(r)}. \quad (4)$$

Einsetzen von (4) in (2) liefert mit einer noch freien

<sup>1</sup> s. z. B.: OLLENDORFF, Berechnung magnetischer Felder, Bd. I, Springer-Verlag, Wien (1952) S. 98.







tung ist dann die 8., weshalb bei dieser Dimensionierung ein sehr homogenes Zentralfeld zu erwarten ist.

Aus (17) und (18) erhält man die funktionale Beziehung:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2 m} H_z(r=0, z=0) \sim \frac{\partial^2 m}{\partial a^2 m} H_{00} \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Damit ergeben sich die optimalen Größen  $a$ ,  $b$  und  $R$  als Lösungen des Gleichungstrippels:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \frac{J_1(\lambda_k R)}{J_1^2(\lambda_k)} \frac{\cos \frac{\lambda_k}{2}(b-a)}{\sin \frac{\lambda_k}{2} b} \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 \frac{J_1(\lambda_k R)}{J_1^2(\lambda_k)} \frac{\cos \frac{\lambda_k}{2}(b-a)}{\sin \frac{\lambda_k}{2} b} \\ 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^6 \frac{J_1(\lambda_k R)}{J_1^2(\lambda_k)} \frac{\cos \frac{\lambda_k}{2}(b-a)}{\sin \frac{\lambda_k}{2} b} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die Lösung, die im Probierv erfahren gefunden wurde und derzufolge Verwendung der asymptotischen Näherungen der BESSELFunktionen und Hyperbelfunktionen bei großem Argument und wegen des Abbrechens der Summationen nach Erreichen einer gewissen Kleinheit der Restglieder eine Rechengenauigkeit von etwa 1% anhaftet, steht in Übereinstimmung mit den an einer Modellanordnung mit 3% Meßfehler aufgenommenen optimalen Daten und lautet:

$$\left. \begin{aligned} a &= 0,53 \\ b &= 1,06 \\ R &= 0,59 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Die Meßanordnung besteht aus einer Mu-Metall-dose (160 mm Innen-Ø, 2,5 mm Wandstärke) mit verstellbarem Deckelabstand, in der nach Abb. 1 Spulenpaare verschiedener Durchmesser symmetrisch verschiebbar angeordnet werden können. Die Spulen werden mit Wechselstrom (4 kHz) gespeist. Die Messung des Feldes geschieht mit einer beweglichen Spulensonde (4 mm Ø), die an den Eingang eines hochohmigen Wechselspannung-Meßverstärkers geschaltet ist. Sämtliche Armaturen bestehen aus Pertinax bzw. Plexiglas. Das Meßverfahren läuft auf die Aufnahme der Felder  $H_z(r=0, z)$  und  $H_z(r, z=0)$  einer großen Anzahl von Kombinationen: Deckelabstand, Spulenabstand und Spulendurchmesser hinaus. Mittels eines graphischen Verfahrens ist die Kombination ausgewählt, die die größte Homogeni-

tät des Zentralfeldes hat.  $H_z(r=0, z)$  ist für  $-\frac{a}{2} < z < +\frac{a}{2}$  innerhalb der Meßgenauigkeit konstant,  $H_z(r, z=0)$  ist in Abb. 5 normiert aufgetragen und in Vergleich gesetzt zur Helmholtzanordnung.

Mit den Daten (21) erhält man aus (18):

$$H_{00} = 1,84 \cdot D, \quad (22)$$

während das Zentralfeld bei einer HELMHOLTZanordnung gleichen Spulendurchmessers ohne Abschirmung

$$\tilde{H}_{00} = 1,21 \cdot D$$

betrage, wonach die Abschirmung oben angegebener Dimensionierung eine Feldverstärkung vom Faktor 1,52 bewirkt. Macht man sich noch nachträglich von

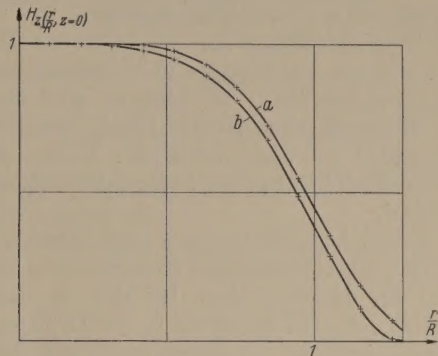


Abb. 5. Axialfeld (gemessen) als Funktion von  $\frac{r}{R}$  für: a) abgeschirmte Anordnung nach (21); b) HELMHOLTZanordnung.

der Normierung des Radius des Abschirmbechers auf 1 frei, beträgt also derselbe  $S$ , so ist das Zentralfeld

$$H_{00[0e]} = 1,84 \cdot \frac{0,4 \pi n J [\text{Amp}]}{S [\text{cm}]} \quad (23)$$

bei Spulenabstand  $0,53 S$ , Radius des Abschirmbechers  $S$ , Länge des Abschirmbechers  $1,06 S$  und Spulenradius  $0,59 S$ .

### Zusammenfassung.

Es wird das Magnetfeld einer Anordnung, bestehend aus einem Paar gleicher Kreisspulen, die nebeneinander auf einer Achse symmetrisch innerhalb eines geschlossenen zylindrischen Abschirmbechers aus hochpermeablem Werkstoff angeordnet sind, berechnet. Die günstigste Dimensionierung wird bestimmt im Hinblick auf ein bestmögliches homogenes Zentralfeld. Der Zusammenhang zwischen diesem und dem felderzeugenden Strom wird formelmäßig gegeben.

Dr. ERNST GÜNTHER SCHLOSSER,  
Laboratorium der Hartmann & Braun A.G., Frankfurt/M.

## Piezoelektrische Kraftmessung.

Von HANS HEINRICH RUST und JOACHIM KROHN.

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. Juli 1954.)

Die Bestimmung des Kraftverlaufes als Funktion der Zeit wird bei direkten Meßverfahren derart vorgenommen, daß die zu ermittelnde Zugkraft bzw. in Zugkraft gewandelte Druckkraft eine Dynamometer-

feder dehnt und das Dehnungsmaß als Kraftäquivalent dient. Ein derartiges Verfahren wird beispielsweise beim Schleppen von Schiffsmoellen im Versuchstank benutzt. Hierbei treten einige Nachteile in



Erscheinung, deren Beseitigung vorteilhaft wäre und außerdem ist es wünschenswert, eine Fernmessung durchführen zu können, wobei handelsübliche elektrische Registriergeräte verwendbar sind. Die Nachteile der beschriebenen dynamometrischen Kraftmeßeinrichtungen bestehen beim Modellschleppen darin, daß infolge der Dehnung der Dynamometerfeder relativ große Meßwege zustande kommen und dadurch Reibungen unvermeidlich sind. Die Federführungen sowohl wie die Führungen für den Schleppdraht über Umlenkrollen usw. bedingen Reibungsverluste, die den Meßwert verfälschen. Daneben treten lästige niederfrequente Pendelschwingungen des Systems Modell-Zugdraht-Feder auf, die beim Registrieren stören. Dem registrierten Kraftverlauf werden dadurch Schwingungskurven überlagert, die den wahren Verlauf oft nur schwer erkennen lassen.

Zwecks Vermeidung der geschilderten Nachteile und um eine oft notwendige Fernmessung und -Registrierung durchführen zu können, muß eine elektrische Messung des Kraftverlaufs vorgenommen werden, wobei ein vernachlässigbar kleiner Meßweg, strenge Reversibilität sowie Nullpunkt Konstanz anzustreben sind.

Die piezoelektrische Messung mechanischer Größen mittels Quarz bietet in dieser Hinsicht ganz besondere Vorteile; der Meßweg liegt bei den zu messenden Kräften bis etwa ein Kilopond in der Größenordnung von X-Einheiten, die aus den entstehenden Ladungen auf der Meßquarzplatte resultierenden Spannungen bei einigen Volt und die Reversibilität ist höher als bei irgendeinem anderen Verfahren der elektrischen Messung mechanischer Größen. Die gesamte Quarzdeformation von einigen X-Einheiten ist völlig vernachlässigbar, da die Wegstrecke, die durch den mechanischen Kraftübertragungsvierpol (Hebelübersetzung) zustande kommt, wesentlich höher liegt, schätzungsweise bei einigen Angströmeinheiten. Bei der Belastung des Quarzes mit beispielsweise einem Kilopond ergibt sich bei einer 3 mm dicken Quarzplatte eine Dickenänderung

$$u_x = d_{11} U = d_{11}^2 P/C = 2,5 \text{ X-Einheiten}$$

( $P$  = Druckkraft,  $C$  = Kapazität des den Quarz enthaltenden Kondensators,  $U$  = Spannung,  $d_{11}$  = piezoelektrischer Modul.) Nebenher tritt noch als vorteilhaft der relativ geringe Temperaturkoeffizient hinzu, der bei einer normal zur  $x$ -Achse geschnittenen Quarzplatte in der Größenordnung von  $10^{-4} (^{\circ}\text{C})^{-1}$  liegt. — Die Erfassung schneller Kraftänderungen, wie z. B. beim Indizieren von Verbrennungskraftmaschinen, bietet keinerlei Schwierigkeiten, da hierfür ein Wechselspannungsverstärker benutzt werden kann, dessen Eingang eine so geringe Ableitung hat, daß während der Kraftmessung kein nennenswerter Abfluß der piezoelektrischen Ladung eintreten kann. Dagegen ist die elektrische Messung langsamer Kraftänderungen — Ablauf eines Beanspruchungszyklus in etwa einer Minute — sehr viel schwieriger; man kann nicht mehr den einfachen Wechselspannungsverstärker benutzen, sondern ist auf die Verwendung eines Gleichspannungsverstärkers angewiesen. Um stabile Arbeitsverhältnisse für die Eingangsrohre zu schaffen, ist die Parallelschaltung eines Gitterableitwiderstandes zum Druckkondensator erforderlich. Bei Verwendung einer Röhre mit hochwertiger Isolierung der Gitterdurch-

führung und Vermeidung der Ionisierung der Röhrenrestgase kann man einen Gitterwiderstand von etwa  $10^{10}$  Ohm verwenden. Das bedeutet aber eine Ladungsabnahme auf  $e^{-1}$  in etwa 0,2 sec.

Um diese Ladungsabnahme zu verringern, wurde eine Meßanordnung gewählt, bei der die durch die Ladung hervorgerufene Gleichspannung am Quarzkondensator in Wechselspannung umgeformt wird und auf diese Weise nicht nur, wie noch gezeigt wird, eine sehr viel günstigere Ladungsabklingkurve gewonnen wird, sondern auch der in vielem recht schwierige Gleichspannungsverstärker durch den stabilen und einfachen Wechselspannungsverstärker ersetzt werden kann. Auch hinsichtlich der Erfassung kleiner Kräfte bietet dieses Verfahren besondere Vorteile; die mittlere Rausch-EMK am Eingang des Verstärkers wird durch leicht durchführbare Begrenzung des Frequenzbereichs

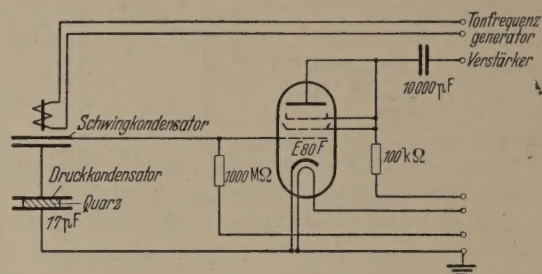


Abb. 1a. Schaltbild mit Serienschaltung von Druck- und Schwingkondensator.

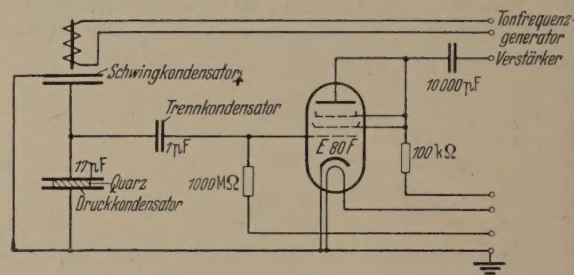


Abb. 1b. Schaltbild mit Parallelschaltung von Druck- und Schwingkondensator.

erniedrigt. — Die verwendete Wandlungsart beruht darauf, daß die Spannung des Quarzkondensators einer periodisch sich ändernden Kapazität zugeführt wird [1], [2] und auf diese Weise Wechselspannungen zustandekommen, die einem Wechselspannungsverstärker zugeführt werden. Die Eingangsschaltung ist also diejenige eines in Niederfrequenzschaltung arbeitenden Kondensatormikrophones. Besonders vorteilhaft ist hierbei, daß der sonst übliche Polarisierungswiderstand, über den die Polarisierungsspannung zugeführt werden muß, weggelassen werden kann, da der Quarz als Polarisierungsspannungsquelle extrem hohen Widerstand aufweist. Abb. 1a und Abb. 1b zeigen die grundsätzlichen Schaltungsmöglichkeiten. Es ist ohne weiteres zu erkennen, daß mit dieser Schaltung nicht leistungslos gemessen werden kann, da ein Ladungsverlust durch den über den Gitterwiderstand wechselstrommäßig auftretenden Energieverlust zustandekommt. Um einen Überblick über die zu erwartende Ladungsabnahme am Quarzkondensator zu gewinnen und den Einfluß der verschiedenen, im Eingangskreis liegenden Kapazitäten zu erkennen, wurde zunächst eine grundlegende Rechnung vorgenommen. — Nach Abb. 1a sind Druck- und Schwingkondensator in Serie geschaltet, nach Abb. 1b parallel, wobei der Trenn-



kondensator zum Gitter erforderlich wird. Rein konstruktiv ist die Schaltung nach Abb. 1a insofern wenig vorteilhaft, da entweder der Druckkondensator oder der Schwingkondensator beidseitig hochwertig isoliert montiert werden muß. Das trifft bei der Schaltung nach Abb. 1b nicht zu; hierbei können sowohl der Druckkondensator als auch der Schwingkondensator einpolig an den Erdpunkt der Schaltung gelegt werden. Hiermit ist auch, wie ohne weiteres einleuchtet, der Vorzug verbunden, daß eine sehr kleine Gitterschaltkapazität eingerichtet werden kann, was hinsichtlich der kapazitiven Spannungsteilung zwischen der Kombination Druck- und Schwingkondensator einerseits und der Gitter-Kathoden-Kapazität andererseits recht vorteilhaft ist. Die Schaltkapazität kann durch den Kunstgriff der Verwendung einer besonderen Kondensatorart, wie weiter unten gezeigt werden wird, noch besonders herabgesetzt werden. Im folgenden wird jedoch auch die Schaltung gemäß Abb. 1a kurz gewürdigt; aus den hieraus resultierenden Erkenntnissen geht ohne weiteres hervor, daß diese Schaltung ungünstiger ist als die nach Abb. 1b, die für die Meßeinrichtung gewählt wurde.

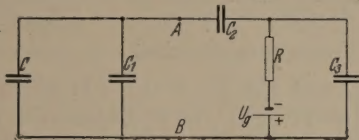


Abb. 2. Kapazitives Netzwerk der verwendeten Schaltung (Parallelschaltung von Druck- und Schwingkondensator).

### Durchrechnung der Schaltung.

In Abb. 2 ist die Schaltung des Eingangskreises dargestellt. Dabei ist  $(C)$  der Schwingkondensator;  $(C_1)$  der Druckkondensator, der den Quarz als Dielektrikum enthält;  $(C_2)$  der Trennkondensator, der ein Abfließen der Ladung von  $(C)$  und  $(C_1)$  verhindert und  $C_3$  die Gitter-Kathoden-Kapazität der Eingangsrohre.  $R$  ist der Gitterwiderstand.

Durch die Gittervorspannung  $U_g$  wird auf das Kondensatorsystem eine Ladung gebracht, die aber nebensächlich ist und auf die Messung keinen Einfluß hat, da sie konstant ist und lediglich eine Nullpunktverschiebung am Ausgangsinstrument des Verstärkers verursacht. Es interessiert die durch die Quarzdeformation zur Zeit  $t = 0$  erzeugte Ladung

$$Q_0 = d_{11} \cdot P, \quad (1)$$

wobei  $d_{11}$  der piezoelektrische Modul in Richtung der  $x$ -Achse und  $P$  die Kraft ist. Die Ladung  $Q_0$  verteilt sich auf  $(C)$ ,  $(C_1)$  und  $(C_2)$  und ruft zwischen den Punkten A und B die Spannung

$$U = \frac{Q_0}{C + C_1 + C_2} \quad (2)$$

hervor. Da keine idealen Isolationsstoffe vorliegen, muß man  $Q = Q(t)$  annehmen, d. h. zur Zeit  $t = 0$  ist  $Q = Q_0$  und zu späteren Zeiten ein kleineres  $Q$  vorhanden.

An dieser Stelle soll nun der rein statische Fall betrachtet werden, um die Größenordnung der Isolationswiderstände der Kondensatoren  $(C)$ ,  $(C_1)$  und  $(C_2)$  abzuschätzen. Bekanntlich gilt im statischen Fall für einen Kondensator

$$Q = Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{C \cdot R_{Is}}\right), \quad (3)$$

wobei hier  $R_{Is}$  der Isolationswiderstand und  $C$  die Kapazität des Kondensators ist. Nimmt man einen Ladungsverlust von etwa 1% in der Zeit von 60 sec als praktisch ausreichend für die Kraftmessung an, so ergibt sich aus Gleichung (3), daß für die Isolationswiderstände von  $(C)$ ,  $(C_1)$  und  $(C_2)$  die Bedingung

$$R_{Is} > 3,6 \cdot 10^{14} \Omega \quad (4)$$

erfüllt sein muß, wobei die Kapazität der einzelnen Kondensatoren etwa 20 pF beträgt.

Wird nun die Kapazität  $C$  periodisch geändert  $(C_0 \pm \Delta C)$ , so spaltet sich  $U$  in einen Gleichspannungs- und einen Wechselspannungsanteil auf, nämlich

$$U = U_+ + U_- \quad (5)$$

Die Kapazität  $C$  ergibt sich aus Abb. 3 zu

$$C = \frac{C_0}{1 + \frac{a}{a_0} \cdot \sin \omega \cdot t} \quad (6)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \cdot \left(1 + \frac{a}{a_0} \sin \omega t\right), \quad (6a)$$

wenn  $C_0$  die Kapazität des ruhenden Kondensators ( $t = 0$ ) ist. Dann ist

$$U_+ = \frac{Q}{C_0 + C_1 + C_2} \quad (7)$$

$$U_- = \frac{Q \cdot C_0 \cdot \frac{a}{a_0} \cdot \sin \omega t}{(C_0 + C_1 + C_2) \cdot \left\{C_0 + (C_2 + C_1) \left(1 + \frac{a}{a_0} \sin \omega t\right)\right\}} \quad (8)$$

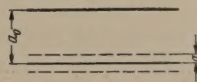


Abb. 3. Idealisierte Darstellung des Schwingkondensators.

Nimmt man nun an, daß  $a \ll a_0$  ist, was praktisch immer erfüllt ist, so wird

$$U_- = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{Q \cdot C_0}{(C_0 + C_1 + C_2)^2} \cdot \sin \omega t. \quad (8a)$$

Infolge der Wechselspannung fließt rechts von A, B ein Strom  $I_-$ . Ist  $U'_-$  der Spannungsabfall über  $(C_2)$  und  $U''_-$  derjenige über der  $R$ - $C_3$ -Kombination, so ist, wenn man die Isolationswiderstände als groß gegen die Blindwiderstände und den Gitterwiderstand betrachtet

$$I_- = C_2 \cdot \frac{dU'_-}{dt} = C_3 \cdot \frac{dU''_-}{dt} + \frac{1}{R} \cdot U''_- \quad (9)$$

mit

$$U_- = U'_- + U''_- \quad (10)$$

Die Annahme über diese Widerstandsverhältnisse ist aber gerechtfertigt, da  $R_{Is} > 3 \cdot 10^{14} \Omega$  und  $R^*$  sowie  $1/\omega \cdot C_2$  etwa  $10^9 \Omega$  ist, wenn man etwa  $C_2$  größer als 1 pF und  $\omega \leq 10^3 \text{ sec}^{-1}$  annimmt. Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt

$$(C_2 + C_3) \cdot \frac{dU''_-}{dt} + \frac{1}{R} U''_- = \frac{dU_-}{dt} \quad (11)$$

\* Dieser verhältnismäßig hohe Ableitwiderstand  $R_g$  ist dann zulässig, wenn der Gitter-Kathoden-Widerstand der Röhre selbst entsprechend hoch liegt, also  $R_{gk} \gg R_g$  ist [3]. Diese Forderung wird aber erfüllt, wenn A-Verstärkung stattfindet und die Gittervorspannung derart gewählt wird, daß bei positiver Steuerhalbwelle noch einige Volt verbleiben, also

$$-U_g + \tilde{U}_{-g} \approx -2 \text{ bis } -3 \text{ V ist.}$$



als Bestimmungsgleichung für  $U''$ . Hierin tritt aber noch  $Q(t)$  als unbekannte Funktion auf, da infolge des OHMSchen Widerstandes an diesem ein Leistungsverlust vorhanden ist, der durch

$$N = \frac{U''^2}{R} \quad (12)$$

wiedergegeben wird. Im Grunde kämen hier noch additiv die Verluste an den Isolationswiderständen der Kondensatoren hinzu. Da diese jedoch groß gegen  $R$  sind, werden deren Verluste klein gegen denjenigen des Gitterwiderstands. Die Verlustleistung  $N$  muß von der im Kondensatorsystem ( $C$ ), ( $C_1$ ) und ( $C_2$ ) gespeicherten Energie aufgebracht werden. Deren Verlust ist

$$-\frac{1}{2} d(Q \cdot U) = N dt. \quad (13)$$

Nun ist das Verhältnis der Spannungsmaxima

$$\frac{\text{Max } U_{\sim}}{\text{Max } U} = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{C_0}{C_0 + C_1 + C_2}, \quad (14)$$

so daß man wegen  $a \ll a_0$  in Gleichung (13)  $U_{\sim} + U_{\sim}$  durch  $U_{\sim}$  ersetzen kann. Dann ist

$$Q dQ = -\frac{C_0 + C_1 + C_2}{R} \cdot U''^2 \cdot dt. \quad (15)$$

Da  $U_{\sim}$  proportional  $Q$  ist, kann man

$$U'' = Q \cdot \Phi \quad (16)$$

setzen. Dadurch geht Gleichung (15) über in

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{C_0 + C_1 + C_2}{R} \cdot \Phi^2 \cdot dt. \quad (17)$$

Somit erhält man eine zweite Bestimmungsgleichung. Setzt man nun Gleichung (16) in (11) ein, so wird

$$\begin{aligned} (C_2 + C_3) \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{R} \cdot \Phi \cdot \left\{ 1 + \frac{a}{a_0} \cdot \frac{C_0 C_2}{C_0 + C_1 + C_2} \right. \\ \left. \cdot \Phi \sin \omega t - (C_2 + C_3) (C_0 + C_1 + C_2) \cdot \Phi^2 \right\} \\ = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{C_0 \cdot C_2 \cdot \omega}{(C_0 + C_1 + C_2)^2} \cdot \cos \omega t. \quad (18) \end{aligned}$$

Dieses ist eine ABELSche Differentialgleichung erster Art, die nicht einfach zu lösen ist. Man kann sich jedoch mit einer Näherung begnügen, die, wie sich später erweisen wird, gerechtfertigt ist. Mit Hilfe des Ansatzes

$$Q = Q_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t), \quad (19)$$

wobei  $\alpha$  noch zu bestimmen ist, wird

$$\begin{aligned} (C_2 + C_3) \frac{d\Phi}{dt} + \left[ \frac{1}{R} - \alpha (C_2 + C_3) \right] \cdot \Phi \\ = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{C_0 \cdot C_2}{(C_0 + C_1 + C_2)^2} \cdot (\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t). \quad (20) \end{aligned}$$

Der Lösungsansatz ist

$$\Phi = A \sin \omega t + B \cos \omega t = \Phi_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (21)$$

mit  $\Phi_0^2 = A^2 + B^2$  und  $\tan \varphi = B/A$ .  $A$  und  $B$  wird aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \omega (C_2 + C_3) \cdot A + \left[ \frac{1}{R} - \alpha (C_2 + C_3) \right] \cdot B \\ = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{C_0 C_2}{(C_0 + C_1 + C_2)^2} \cdot \omega \\ \omega (C_2 + C_3) \cdot B - \left[ \frac{1}{R} - \alpha (C_2 + C_3) \right] \cdot A \\ = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{C_0 C_2}{(C_0 + C_1 + C_2)^2} \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

bestimmt. In Verbindung von Gleichung (17) mit (21) findet man

$$Q = Q_0 \cdot \exp \left\{ -\frac{C_0 + C_1 + C_2}{2R} \cdot \Phi_0^2 \cdot \left( t - \frac{1}{2\omega} \cdot \sin 2(\omega t + \varphi) \right) \right\} \quad (23)$$

und durch Vergleich dieser Gleichung mit (19)

$$\alpha = \frac{C_0 + C_1 + C_2}{2R} \cdot \Phi_0^2. \quad (24)$$

Sofern  $\alpha \ll \omega$  ist, ist eine sehr gute Näherung gefunden. Nun soll aber die durch den Leistungsverlust bedingte Ladungsabnahme in 60 sec kleiner als 1% sein. Das bedeutet, daß

$$\alpha < 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

sein muß. Da die benutzten Frequenzen des Schwingkondensators aber sicher einige Dekahertz betragen, ist  $\alpha \ll \omega$  erfüllt. Die Näherung ist also als sehr gut zu erachten. Löst man das Gleichungssystem (22) auf und bestimmt aus den Lösungen  $\Phi_0^2$ , so findet man

$$\begin{aligned} \Phi_0^2 = \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 \cdot \frac{C_0^2 \cdot C_2^2}{(C_0 + C_1 + C_2)^4} \\ \cdot \frac{R^2 (\omega^2 + \alpha^2)}{R^2 \omega^2 (C_2 + C_3)^2 + [1 - \alpha R (C_2 + C_3)]^2} \quad (25) \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß

1.  $\alpha \ll \omega$  und  $\alpha R (C_2 + C_3) \ll 1$ ; dieses ist erfüllt, wenn  $R < 10^{12} \Omega$  und  $C_2 + C_3$  kleiner als 100 pF sind

2.  $R^2 \omega^2 (C_2 + C_3)^2 \gg 1$ ; das gilt, wenn  $R \geq 10^9 \Omega$ ,  $\omega = 3 \cdot 10^2 \text{ sec}^{-1}$  und  $C_2 + C_3$  etwa kleiner als 10 pF sind

kann man  $\alpha^2$  gegen  $\omega^2$  und  $[1 - \alpha R (C_2 + C_3)]^2$  gegen  $R^2 \omega^2 (C_2 + C_3)^2$  vernachlässigen. Dann wird

$$\Phi_0 = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{C_0 \cdot C_2}{(C_2 + C_3) (C_0 + C_1 + C_2)^2}. \quad (26)$$

Aus den Gleichungen (24) und (26) kann man nun die Dimensionierung der Schaltelemente ermitteln. Mit

$a = 0,04 \text{ mm}$ ;  $a_0 = 0,5 \text{ mm}$

$R = 10^9 \Omega$ ;  $C_0 = 57/a_0 \text{ pF}$ ;  $C_1 = 17 \text{ pF}$ ;  $C_2 = 1 \text{ pF}$

$\nu = \omega/2\pi = 50 \text{ sec}^{-1}$ ;  $d_{11} = 2,08 \cdot 10^{-11} \text{ Coul/kp}$

ergibt sich

$$\alpha = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \text{ und } \left( \frac{\Delta Q}{Q_0} \right)_{60} = 3,1\%.$$

Die kleinste meßbare Kraft ergibt sich auf Grund des Rauschpegels des verwendeten Verstärkers. Für die Versuche wurde ein Tonfrequenzverstärker, dessen Frequenzbereich etwa 10 kHz beträgt, benutzt. Die Rausch-EMK beträgt  $\bar{E} = \sqrt{4 kT \cdot R \cdot \Delta \nu}$ , was in dem gerechneten Fall zu  $\bar{E} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Volt}$  führt. Der äquivalente Rauschwiderstand der als Triode geschalteten Pentode kann hierbei vernachlässigt werden, da er nur einige 100  $\Omega$  beträgt. Rechnet man mit einem Rauschabstand von 1:3, so ergibt sich als kleinste meßbare Kraft  $P = 654 \text{ pond}$ . Der für die Untersuchung verwendete Verstärker ist sehr ungünstig. Er wird zweckmäßigerweise durch einen Tiefpaß- oder Resonanzverstärker ersetzt. Unter Verwendung einer Betriebsfrequenz von 50 Hz ergäbe sich bei einem Resonanzverstärker beispielsweise mit einer Kreisgüte von etwa 10 eine Bandbreite von

$$\Delta \nu = \nu \cdot d = 5 \text{ Hz}$$

( $d$  = Dämpfung = reziproke Kreisgüte).



In diesem Fall ergäbe sich als kleinste meßbare Kraft  $P = 14,6$  pond.

Wie bereits schon erwähnt, soll noch kurz die Serienschaltung von Druck- und Schwingkondensator betrachtet werden. Der Gang der Rechnung ist analog dem vorangegangenen; es ändern sich lediglich infolge der Serienschaltung  $\alpha$  und  $\Phi_0$ :

$$\alpha = \frac{C_0 + C_1}{2R} \cdot \Phi_0^2; \quad \Phi_0 = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{C_0 \cdot C_1}{(C_1 + C_3)(C_0 + C_1)^2}$$

Mit den bereits verwendeten Zahlenwerten ergibt sich

$$\alpha = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ sec}^{-1} \quad \text{und} \quad \left( \frac{\Delta Q}{Q_0} \right)_{60} = 48,5\%$$

Neben den schon hervorgehobenen aufbaumäßigen Schwierigkeiten, den Druck- oder Schwingkondensator beidseitig hochwertig zu isolieren, ergeben sich bei dieser Schaltung, wie die Rechnung zeigt, ungünstigere Verhältnisse.

### Versuchsanordnung.

Für die Durchführung einer praktischen Erprobung der piezoelektrischen Kraftmessung wurde eine Messingkapsel gemäß Abb. 4 hergestellt, in die eine Quarzplatte von 40 mm Durchmesser und 3 mm Dicke eingelagert wurde. Die verwendete Quarzplatte ist normal zur  $x$ -Achse geschnitten, weist also maximalen Piezoeffekt auf. Gegen die Platte, deren eine elektrische Belegung der Boden der Kapsel darstellt, drückt eine mittels Tränkharz<sup>1</sup> vom Druckstempel isolierte Gegenelektrode<sup>2</sup>, deren elektrische Zuführung über eine Tränkharzbuchse erfolgt. Um Zugkräfte in Druckkräfte zu verwandeln, wurde ein Hebel vorgesehen, dessen Verhältnis Kraftarm zu Lastarm bis 1:10 beträgt. Auf diese Weise können noch Kräfte der Messung zugänglich gemacht werden, die 1/10 des durch die Rausch-EMK bedingten Minimalwertes sein können.

Für den Aufbau des Schwingkondensators diente eine elektromagnetisch betriebene Telefonkapsel, deren Membran die bewegliche und geerdete Elektrode darstellt. Als feste Gegenelektrode wurde eine gut plan gedrehte mit einer Verstellspindel versehene Messingplatte benutzt, so daß der Abstand zwischen den beiden Elektroden verändert werden kann. Die Isolierung der verstellbaren Elektrode erfolgte wiederum mit dem erwähnten Tränkharz.

Es ist wichtig, die Schaltkapazität des Röhren-gitters möglichst niedrig zu halten, da jeder Kapazitätzuwachs die Spannung am Gitter mindert. Durch einen Kunstgriff konnte die Schaltkapazität auf ein Minimum herabgedrückt werden. Gemäß Abb. 5 wurde ein Zylinderkondensator verwendet; die innere Elektrode ist mit dem Gitter verbunden, die äußere mit dem gemeinsamen Pol von Schwing- und Druckkondensator. Man kann hierfür in einfacher Weise ein entsprechend bemessenes Stück Koaxialkabel<sup>3</sup> mit Styroflexisolation, die hinsichtlich Ableitung höchsten Ansprüchen genügt, benutzen.

<sup>1</sup> Dieser erstklassige Isolierstoff wurde freundlicherweise von der Firma Dr. Beck & Co., Hamburg, zur Verfügung gestellt, wofür wir an dieser Stelle vielmals danken.  $\rho > 5 \cdot 10^{15} \Omega \text{ cm}$ .

<sup>2</sup> Man kann auch an Stelle einer hochisolierenden Zwischenplatte eine zweite Quarzplatte verwenden, wobei zwischen den beiden elektrisch richtig orientierten Platten die Elektrode liegt.

<sup>3</sup> Siemens & Halske Type PoCY 1  $\times$  0,15/5,5 Fe.

Sämtliche Schaltelemente befinden sich in einem luftdichten Gehäuse, in dem die Luft durch Silicagel trocken gehalten wird. Die luftdichte Durchführung des Druckstempels in das Gehäuseinnere erfolgt mittels Gummimembran. Es ist noch zu erwähnen, daß die Quarzplatte vor dem Einbau in die Druckmeßkapsel sehr sorgfältig gereinigt werden muß; einmaliges Anfassen am (polierten!) Rand genügt, um die Ableitung um Größenordnungen zu erhöhen.

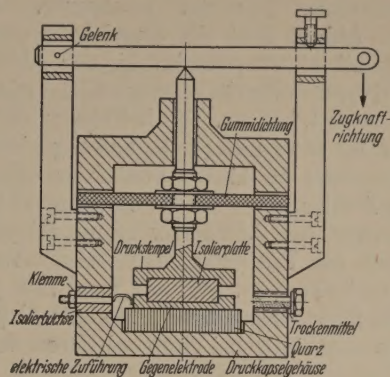


Abb. 4. Schnitt durch die Druckkapsel mit Quarz.

Nach dem Zusammenbau wurde der Isolationszustand elektrometrisch geprüft; es ergab sich der geforderte hohe Isolationswiderstand.

Infolge der über den Gitterwiderstand am Gitter der Röhre liegenden Gittervorspannung ergibt sich eine statische Ladungsverteilung über die einzelnen Kondensatoren, wie aus dem Prinzipschaltbild Abb. 2 hervorgeht. Die am Schwingkondensator liegende Ladung verursacht bereits eine konstante Wechselspannung am Gitter. Eine weitere Wechselspannungskomponente resultiert aus der Voltaspannung, die am

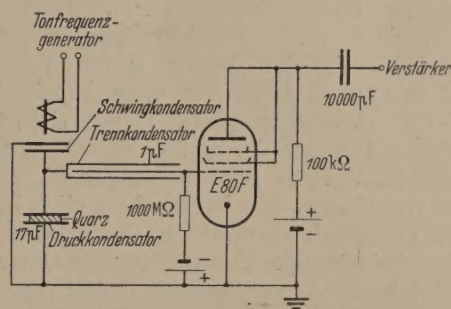


Abb. 5. Schaltschema der Versuchsanordnung.

Schwingkondensator entsteht (2). Je nach Polarität der Voltaspannung kann die Summe oder Differenz zwischen Gitterspannung und Voltaspannung wechselstromerzeugend eingehen. Durch Gegenschalten einer Batterie oder durch Ändern der Ruhkapazität des Schwingkondensators (Spannungsänderung am Schwingkondensator) können beide Gleichspannungen kompensiert werden<sup>1</sup>. Liegt keine Kompensation beider Spannungen vor, so überlagert sich deren Resultante die sich bei Druckbeanspruchung aus der Quarzladung ergebende Spannung additiv oder sub-

<sup>1</sup> Es besteht natürlich auch die Möglichkeit, die durch beide Gleichspannungen bewirkte Wechselspannung am Verstärker-Ausgang zu kompensieren, gemeinsam mit der Rauschkomponente; diese Maßnahme erscheint jedoch nicht günstig, da durch die Ruh-Wechselspannung bei unbeanspruchtem Quarz ein Teil des Aussteuerbereiches der Röhren belegt ist.



traktiv, je nach Polarität der Quarzplatte. Es kann also mit wachsender Kraft am Druckquarz zu positiven oder negativen Ausschlägen am Anzeiginstrument am Ausgang des Verstärkers kommen. Auf Grund dieses Sachverhalts ist leicht zu erkennen, welche Lage die Quarzplatte einzunehmen hat.

### Meßergebnisse.

Die Versuchsergebnisse zeigen eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der Rechnung. Aus dem Diagramm Abb. 6 geht die errechnete und die gemessene Abklingkurve, die infolge der Ableitung des im kapazitiven Netzwerk liegenden Gitterwiderstandes zustande kommt, hervor. Die bei einem Gitterwiderstand von  $10^9 \Omega$  resultierende Ladungsabnahme um 4,1% nach einer Meßdauer von einer Minute stellt keinen Meßfehler dar; die Abklingkurve ist streng reproduzierbar, so daß die Meßwerte mit zeitabhängigen Korrekturen zur Ermittlung des wahren Wertes versehen werden können. Würde man das piezoelektrische Meßverfahren beim Modellschleppen anwenden, so entstünde bei einer mittleren Schleppzeit

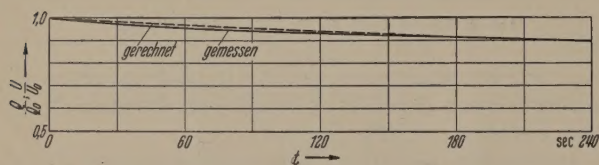


Abb. 6. Gemessene und berechnete Abnahme der Quarzladung bzw. -Spannung als Funktion der Zeit.

von etwa 30 sec ein Fehler von 2,5% am Ende der Messung, falls man auf die Anbringung der Korrektur verzichtet. Da alle Kraftübertragungselemente vom Schleppmodell zur Meßeinrichtung weitgehend starr eingerichtet werden können, ergibt sich der Vorteil, daß nicht nur Kraftmessungen im eingefahrenen Zustand, sondern auch Beschleunigungen erfassbar werden, bei geeigneter Auslegung des Verstärkers (z. B. Resonanzverstärker mit Gegenkopplung oder Kathodenverstärkereingangsstufe) lassen sich, wie bereits abgeschätzt wurde, unter Zuhilfenahme des mechanischen Vierpols Kraftmessungen bis zu 1 bis 1,5 pond vornehmen. Mit Verwendung eines in Richtung der  $y$ -Achse beanspruchten Quarzstabes lassen sich jedoch bei günstiger Formgebung des Quarzes mit der beschriebenen Apparatur noch Kräfte messen, die um etwa zwei Größenordnungen kleiner sind, wie aus folgender Rechnung hervorgeht. Die Beziehungen für Beanspruchung in Richtung der  $x$ - und  $y$ -Achse sind:

$$Q_x = d_{11} \cdot P_x$$

$$Q_x = -d_{11} \cdot P_y \cdot q_x/q_y$$

( $P_x$  = Beanspruchung in Richtung der  $x$ -Achse,  $P_y$  = Beanspruchung in Richtung der  $y$ -Achse,  $q_x$  = Fläche normal zur  $x$ -Achse,  $q_y$  = Fläche normal zur  $y$ -Achse).

Für Ladungsgleichheit ergibt sich

$$|P_x/P_y| = |q_x/q_y|.$$

Wird das Flächenverhältnis etwa 100:1 gewählt (das entspräche einem Stabe mit den Abmessungen: 10 cm in Richtung  $y$ -der Achse, 1 cm in Richtung der  $z$ -Achse 0,1 cm in Richtung der  $x$ -Achse), so ergeben sich gleiche Meßwerte bei Kräften mit dem Faktor  $10^{-2}$ . Unter Zugrundelegung des für einen Resonanz-

verstärker mit 50 Hz Betriebsfrequenz errechneten Rauschpegels ergäbe sich bei einem Rauschabstand von 1:3 eine meßbare Minimalkraft von 0,01 bis 0,02 pond.

Bei den vorstehenden Untersuchungen wurde die der Kraft proportionale Wechselspannung am Ausgang des Verstärkers mit einem üblichen Mehrfachinstrument gemessen. Zweckmäßigerweise wird hierfür ein Präzisionsinstrument in Kompensationschaltung gewählt. Bei genügender Leistungsreserve der Endstufe des Verstärkers (im vorliegenden Fall 4 Watt) können mehrere Tochterinstrumente, z. B. in Form von schreibenden Voltmetern, parallel betrieben werden, womit sich eine bequeme Fernmessung und -Registrierung ergibt.

Die Meßgenauigkeit der beschriebenen Einrichtung soll im folgenden kurz diskutiert werden, ohne jedoch konkrete Werte mitzuteilen, da eine Gerätezusammensetzung maßgebend ist, die bei der Untersuchung nicht vorlag. Es wurde zum Teil mit vorhandenen Laboreinrichtungen, die unbedenklich für die angestellten grundlegenden Untersuchungen herangezogen werden konnten, gearbeitet.

### 1. Frequenz und Amplitude des Schwingkondensators.

Für die versuchsmäßige Herstellung eines Schwingkondensators wurde, wie bereits erwähnt, eine Hörerkapsel, die mit der Netzfrequenz von 50 Hz gespeist wurde, benutzt. Auf das Meßergebnis haben Frequenzschwankungen keinen Einfluß, wie die Berechnung zeigt (Gl. (26)). Wird jedoch ein Resonanzverstärker, der wegen des minimalen Rauschpegels und geringerer Stufenzahl bei gleichem Verstärkungsfaktor besonders vorteilhaft wäre, benutzt, so spielt die Frequenzkonstanz eine erhebliche Rolle. Das benutzte Netz weist eine Frequenzkonstanz auf, bei der die größte Tagesschwankung zwischen 49,8 und 50,1 Hz liegt, ein Wert, der bei den etwa bei dieser Frequenz erzielbaren Resonanzkreisgüten von 10 bis 20 als außerordentlich günstig anzusprechen ist. Die aus den genannten Frequenzänderungen resultierenden Änderungen des Verstärkungsgrades können etwa vernachlässigt werden. Bei Verwendung eines Tiefpaßverstärkers spielen Frequenzschwankungen überhaupt keine Rolle, wenn der Durchlaßkanal breit genug ist.

Netzspannungsschwankungen verursachen Amplitudenschwankungen der beweglichen Elektrode des Schwingkondensators und gehen damit direkt in das Meßergebnis ein. Dieses erkennt man unmittelbar aus Gleichung (26). Die in Wechselspannung umgeformte Gleichspannung, die durch die Quarzladung hervorgerufen wird, ist nämlich der Amplitude  $a$  der beweglichen Elektrode des Schwingkondensators direkt proportional und  $a$  ist wiederum eine Funktion der als Erregerspannung benutzten Netzspannung. Bei der Auslegung eines piezoelektrischen Kraftmeßgerätes muß infolgedessen dafür gesorgt werden, daß Amplitudenschwankungen der beweglichen Elektrode innerhalb einer bestimmten vorgegebenen Grenze bleiben, die durch den geforderten Meßfehler, der nicht überschritten werden darf, festgelegt wird. Dieses gelingt einerseits mit Hilfe einer Spannungsstabilisierung (z. B. mittels Stabilisator oder auf magnetischem Wege) und andererseits durch entsprechende Dimensionierung des elektromagnetischen



Antriebssystems, indem man einen unpolarisierten Magneten verwendet, der bei der unteren Schwingungsgrenze der Betriebsspannung in der Sättigung arbeitet. Nebenher ergibt sich hierbei Frequenzverdoppelung, die ohne Einfluß auf die Messung ist.

## 2. Verstärker.

Der Verstärker muß in bekannter Weise so aufgebaut sein, daß Netzspannungsänderungen derart gemindert werden, daß Verstärkungsgradänderungen wiederum unterhalb der Grenze der vorgegebenen Meßgenauigkeit liegen.

## 3. Temperaturkoeffizient.

Es scheint erforderlich, den Temperaturkoeffizienten der gesamten Apparatur zu bestimmen, um gegebenenfalls entsprechende temperaturabhängige Korrekturen vornehmen zu können.

Für den Betrieb der beschriebenen Kraftmeßeinrichtung wurde Quarz als piezoelektrischer Kristall gewählt. Man könnte auf die Vermutung kommen, daß noch andere piezoelektrische Kristallarten, z. B. Seignettesalz mit seinem gegenüber Quarz vielfach größeren piezoelektrischen Modul, für Kraftmessungen verwendet werden könnten. Von den mehr als hundert bekannten piezoelektrischen Kristallarten kommen jedoch nur Quarz und Turmalin für den vorliegenden Zweck in Frage, da nur diese beiden die notwendigen Bedingungen erfüllen, nämlich hoher spezifischer Widerstand, große Druckfestigkeit, hydrophobes Verhalten und daraus resultierend hoher Oberflächenwiderstand. Turmalin scheidet wegen Kostbarkeit aus dem Kreis der Betrachtungen aus. Die üblichen Kristallarten mit hohem piezoelektrischen Modul, wie Seignettesalz und ähnliche (z. B. Ammoniumphosphat, Äthylendiamintartrat) sind halbleitend (Kristallwasser) und aus diesem Grund nur für pulsierende oder Wechselkraftmessungen mit Frequenzen etwa  $> 10$  Hz verwendbar. Daneben weisen diese Kristallarten viele Nachteile auf, wie z. B. Curiepunkt im Zimmertemperaturbereich, sie sind hydrophil und besitzen nur geringe Bruchfestigkeit.

## Zusammenfassung.

Es wird ein Verfahren beschrieben, um mit Hilfe des Piezoeffektes von Quarz statische Kraftmessungen durchzuführen. Die aus der Ladung des beanspruchten Quarzes resultierende Gleichspannung wird mittels eines Kondensators, dessen Kapazität sich periodisch ändert (Schwingkondensator) in Wechselspannung gewandelt und diese einem Verstärker zugeführt. Die infolge des Gitterwiderstandes der ersten Röhre bewirkte Verlustleistung wird rechnerisch ermittelt. Aus der Rechnung ergibt sich die Abklingkurve der Quarzladung; sie stimmt ausgezeichnet mit der gemessenen überein. Es wird die für die Untersuchungen verwendete Kraftmeßeinrichtung beschrieben und gezeigt, daß bei sorgfältigem Aufbau der einzelnen Schaltelemente und der Wahl hochwertiger Isolierstoffe ein Meßgerät hergestellt werden kann, mit dem sich noch sehr kleine Kräfte (etwa 1 pond bei Beanspruchung in Richtung der  $x$ -Achse des Quarzes und etwa 0,01 pond bei Beanspruchung in Richtung der  $y$ -Achse) elektrisch bestimmen lassen. Das Verfahren gestattet Fernmessung und -Registrierung der Kraft als Funktion der Zeit. Die Abklingkurve ist streng reversibel und kann für Präzisionsmessungen als Korrekturgrundlage dienen. Für 1 Minute Meßdauer ergibt sich bei Verwendung eines Gitterwiderstandes von  $10^9 \Omega$  am Gitter der ersten Röhre des Verstärkers eine Abweichung von 4,1% vom wahren Meßwert. Es wird dargelegt, daß von den heute bekannten piezoelektrischen Kristallen nur Quarz für derartige Messungen herangezogen werden kann.

Zum Schluß möchten wir Herrn Prof. Dr.-Ing. G. WEINBLUM für die großzügige Förderung der Arbeit unseren verbindlichsten Dank aussprechen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken wir für die Bereitstellung der finanziellen Mittel.

**Literatur:** [1] DORSMAN, G.: Philips techn. Rdsch. 7, 24 (1942). — [2] RUST, H. H.: Z. angew. Phys. 2, 290 (1950). — [3] SCHMID, O.: A. E. Ü. 5, 85 (1951).

Institut für Schiffsbau der Universität Hamburg,  
Dr. HANS HEINRICH RUST      Dipl.-Phys. JOACHIM KROHN  
Hamburg-Wandsbek      Hamburg 34  
Lesserstr. 21      Elmtwiete 2

## Gütebestimmung von Quarzen in Parallelresonanz.

Von GERHARD BRUNNER und ARTUR LÖSCHE.

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 18. Juli 1954.)

### Einleitung.

Zwischen der Bandbreite und der Güteziffer besteht bekanntlich die Beziehung  $\Delta f = \omega_0 / 2\pi Q$ , wo  $\omega_0$  die Kreisfrequenz im Resonanzfall und  $Q$  die Güteziffer ist. Bei einem Wert  $Q = 10^4$ , der etwa einem technischen Quarz entspricht, wäre  $\Delta f = 50$  Hz bei einer Resonanzfrequenz  $\nu_0 = 500$  kHz. Entsprechend hoch sind natürlich die Resonanzwiderstände bei Parallelresonanz: größenordnungsmäßig  $10^7$  Ohm. Bei Ankopplung des Quarzes an irgendwelche Meßgeräte tritt daher eine zusätzliche Bedämpfung der Quarschwingungen ein, die meistens nicht vernachlässigt werden kann. Man erkennt daraus die Schwierigkeiten, die der Gütebestimmung von Quarzen entgegenstehen.

Es wurde deswegen versucht die Quarzgüten zu messen, indem man ihre Resonanzeigenschaften bei Anregung mit einer zeitlich linear veränderlichen Frequenz bestimmt. Dieses Verfahren vermeidet die oben ange-deuteten Schwierigkeiten weitgehend. In einer Arbeit von G. HOK [1] sind diese Resonanzverhältnisse besonders für die Anregung eines Reihenresonanzkreises durchgerechnet worden. Außerdem beschreibt H. MAYER [2] eine Apparatur, die es gestattet Quarze bei Anregung mit linear veränderlicher Frequenz zu untersuchen.

Den Anstoß zu den folgenden Überlegungen gab die Beschäftigung mit den Beziehungen, die zwischen den magnetischen Kernresonanzerscheinungen und



elektrischen Resonanzkreisen bestehen, und über die an anderer Stelle berichtet wird [3]. Die Methode der Gütebestimmung, die sich daraus ergeben hat, gründet sich auf die mathematische Behandlung der Anregung eines Parallelresonanzkreises durch eine linear veränderliche Frequenz, die daher nun kurz dargelegt werde.

### 1. Parallelkreise bei linearen Gleitfrequenzen.

In dem parallel zu  $L, C$  liegenden Widerstand  $R$  seien Spulen- und Kondensatorverluste zusammengefaßt. Der Parallelschwingkreis werde durch den Strom

$$J = J_0 e^{j(\omega_0 t + a t^2)} \quad (1)$$

angeregt, wo

$$\omega = \omega_0 + 2 a t \quad (2)$$

die momentane Kreisfrequenz ist. Dabei ist

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2a)$$

praktisch die Kreisfrequenz im Resonanzfall bei genügender Größe von  $R$ .

$$2 a = \frac{d\omega}{dt} = \text{const} \quad (2b)$$

ist die Frequenzgeschwindigkeit. Dann gilt die Differentialgleichung

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} + \int_{-\infty}^t \frac{U dt}{L} = J_0 e^{j(\omega_0 t + a t^2)} \quad (3)$$

wo  $U$  die am Kondensator bzw. am Kreis liegende Momentanspannung ist. Zur Lösung von (3) wird eine LAPLACE-Transformation durchgeführt. Der Resonanzpunkt des Kreises wird, wie man aus (2) sieht, zur Zeit  $t = 0$  erreicht. Das Transformationsintegral wird deshalb von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckt. Als Anfangsbedingung kommt hinzu, daß der Kreis für  $t = -\infty$  völlig in Ruhe sein soll, d. h.  $U$  und seine Ableitungen sind Null. Damit entsteht

$$C p u + \frac{u}{R} + \frac{1}{p} \frac{u}{L} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_0 e^{j(\omega_0 T + a T^2)} e^{-pT} dT; \quad (4)$$

$u$ , die Unterfunktion zu  $U$ , ist dann

$$u = Z(p) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_0 e^{j(\omega_0 T + a T^2)} e^{-pT} dT, \quad (5)$$

wobei

$$Z(p) = \frac{R L p}{R L C p^2 + L p + R} \quad (5a)$$

gesetzt ist. Die Größe  $p$  ist die Transformationsvariable, also die Veränderliche im Unterbereich. Der Faktor  $Z(p)$  vor dem Integral gleicht dabei formal dem Ausdruck für die Impedanz des Kreises, falls  $p$  mit  $j\omega$  identifiziert wird. Mit dieser Bedeutung von  $p$  kann man die Transformation so auffassen, daß man zunächst von den Zeitfunktionen zu ihren Frequenzspektren übergeht, da sich mit diesen leichter rechnen läßt. Das Integral in (5) stellt bis auf einen Faktor  $\pi/j$  die komplexe Amplitude im Frequenzspektrum der Anregungsfunktion (1) dar. Die Rücktransformation in den Oberbereich geschieht in bekannter Weise mittels des BROMWICHintegrals. Zuvor stellen wir den Impedanz-Ausdruck  $Z(p)$  in Gl. (5a) als Summe von

Partialbrüchen dar. Allgemein gilt für  $Z(p)$  als Quotienten der Polynome  $g(p)$  und  $h(p)$

$$Z(p) = \frac{g(p)}{h(p)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{g(p_\nu)}{h'(p_\nu) \cdot (p - p_\nu)} \quad (6)$$

wo  $p_\nu$  die Wurzeln des Nenners sind. Unter Beachtung dessen wird die in den Oberbereich zurücktransformierte Funktion

$$U(t) = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{2\pi j} \frac{g(p_\nu)}{h'(p_\nu)} \cdot \int_{Br} \frac{e^{pT}}{p - p_\nu} \times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} J_0 e^{j(\omega_0 T + a T^2)} e^{-pT} dT \right\} dp \quad (7)$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \frac{g(p_\nu)}{h'(p_\nu)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_0 e^{j(\omega_0 T + a T^2)} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{Br} \frac{e^{p(T-T)} }{p - p_\nu} dp \right\} dT. \quad (8)$$

$Br$  bedeutet dabei den Integrationsweg des BROMWICHintegrals. Nach dem Residuensatz hat der Klammerausdruck in (8) den Wert

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{Br} \frac{e^{p(T-T)}}{p - p_\nu} dp = e^{p_\nu(T-T)}. \quad (9)$$

Das ist das Residuum des Integranden, der nur einen Pol erster Ordnung an der Stelle  $p = p_\nu$  hat. Man erhält somit

$$U(t) = \sum_{\nu=1}^n \frac{g(p_\nu)}{h'(p_\nu)} \int_{-\infty}^t J_0 e^{j(\omega_0 T + a T^2)} e^{p_\nu(T-T)} dT. \quad (10)$$

Es ist nunmehr zweckmäßig eine dimensionslose Variable  $\gamma$  einzuführen, so daß

$$\gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} (j\omega_0 - p_\nu) + j a^{\frac{1}{2}} t \quad (11)$$

gesetzt wird. Werden noch die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung für den vorliegenden Fall eingesetzt so gelangt man schließlich zu

$$U(t) = J_0 e^{j(\omega_0 t + a t^2)} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} C} Fr(\gamma), \quad (12)$$

wo zur Abkürzung

$$Fr(\gamma) = -j e^{j\gamma^2} \int_{0-j\infty}^{\gamma} e^{-j\gamma'^2} d\gamma' \quad (13)$$

gesetzt ist. Diese Funktion, für die G. HOK die Bezeichnung FRESNELfunktion vorgeschlagen hat, tritt ganz allgemein bei linearen Resonanzsystemen auf. Den Gln. (11) entsprechend kommen zunächst zwei Möglichkeiten für  $\gamma$  in Betracht, da zwei verschiedene  $p_\nu$  existieren, wie man aus (5a) sieht, nämlich

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_1 \quad (14)$$

mit

$$\delta = \frac{1}{2RC} = \frac{\omega_0}{2Q} = \Delta f \pi \quad (15)$$

und

$$\omega_1 = \left( \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2 C^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$



Es ergeben sich mithin für  $\gamma$  die Werte

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \delta a^{-\frac{1}{2}} + j a^{\frac{1}{2}} t, \quad (17a)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \delta a^{-\frac{1}{2}} - j \left( \omega_0 a^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} t \right) \quad (17b)$$

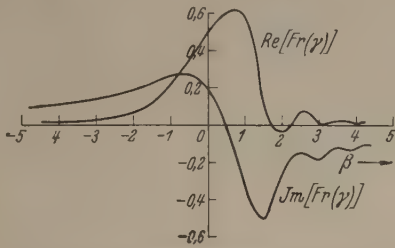


Abb. 1. Real- und Imaginärteil von  $Fr(\gamma)$  für  $\alpha = 0,7$ .

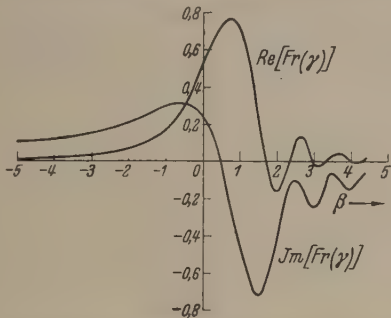


Abb. 2. Real- und Imaginärteil von  $Fr(\gamma)$  für  $\alpha = 0,5$ .

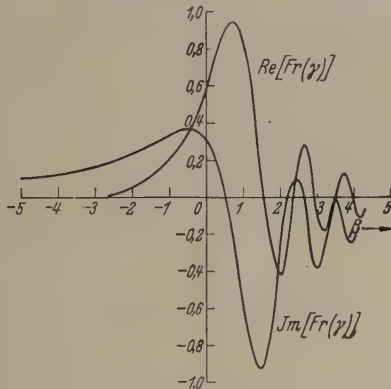


Abb. 3. Real- und Imaginärteil von  $Fr(\gamma)$  für  $\alpha = 0,35$ .

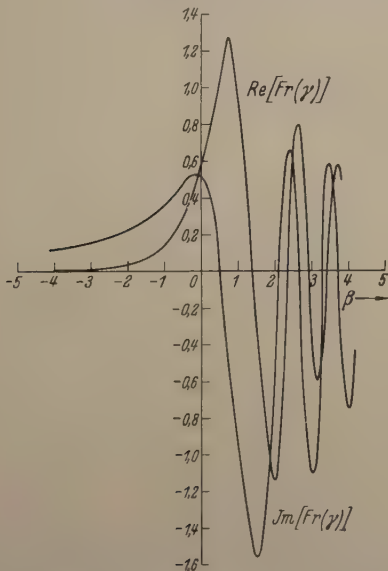


Abb. 4. Real- und Imaginärteil von  $Fr(\gamma)$  für  $\alpha = 0,1$ .

von denen  $\gamma_2$  wegen der Unverträglichkeit mit dem notwendigen Verhalten von (13) für große  $t$  sofort ausscheidet. Die Funktion  $Fr(\gamma)$  läßt sich außer für rein imaginäre  $\gamma$  nicht auf tabellierte Funktionen zurückführen. Man gelangt zu Funktionswerten durch Reihenentwicklung (siehe dazu<sup>1)</sup>). Wie aus (11) und (17a) hervorgeht, sind

$$Re(\gamma) = \alpha = \frac{1}{2} \delta a^{-\frac{1}{2}} \quad (18a)$$

$$Im(\gamma) = \beta = a^{\frac{1}{2}} t \quad (18b)$$

die Real- und Imaginärteile der Veränderlichen  $\gamma$ . Die Abb. 1, 2, 3 und 4 zeigen Real- und Imaginärteil der Funktion  $Fr(\gamma)$ . Dabei ist in jeder Abbildung  $\alpha$  als fester Parameter angenommen. Auf der Abszisse ist jeweils  $\beta$  aufgetragen. Gl. (12) ist die Lösung von Gl. (3). Diese Lösung enthält den anregenden Strom als Faktor. Wenn man demnach

$$\frac{U(t)}{J_0} e^{-j(\omega_0 t + a t^2)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} C} Fr(\gamma) \quad (19)$$

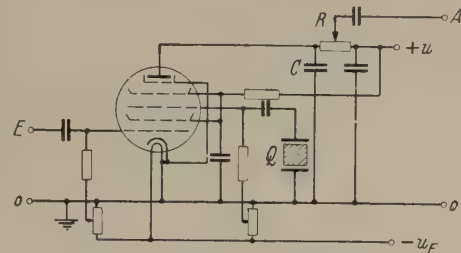


Abb. 5. Schaltbild des Diskriminators.

in der komplexen Ebene aufzeichnet, so erhält man dadurch die Ortskurven des Widerstandes für den Parallelkreis mit ihren charakteristischen Abweichungen von der Kreisform, die sie im stationären Fall besitzen. Derartige „dynamischen Ortskurven“ sind bereits von FELDKELLER [4] nach einem graphischen Verfahren ermittelt worden.

Die Dämpfung  $\delta$  des Kreises ist nur in  $\alpha$  enthalten. Deswegen geben die Kurven der Abb. 1, 2, 3 und 4 mit  $\alpha$  als Parameter das Resonanzverhalten des Parallelkreises für verschiedene Dämpfungen oder Güten wieder. Die Zeit  $t$  ist nur in  $\beta$  enthalten.

## 2. Experimentelles Verfahren.

Man kann grundsätzlich über die Güte eines Kreises Auskunft erhalten, wenn man bei Anregung mit einer linearen Gleitfrequenz zur Kenntnis der in den Abb. 1, 2, 3 und 4 dargestellten Kurven gelangt. Das erreicht man mit einer einfachen Diskriminatorschaltung, wie sie in [5] eingehender beschrieben wird. Die Abb. 5 zeigt das Schaltbild. Bei  $E$  wird eine Anregungsspannung zugeführt; die linear frequenzmoduliert ist, d. h. die dem Ansatz (2) entspricht. Sie wird in einem Oszillator mit Reaktanzröhre erzeugt. Über die Steuergitter der Mischröhre wird der Quarz  $Q$  angeregt. Diejenigen Anteile des Anodenstroms, welche die Anregungsfrequenz  $\omega$  enthalten, werden über  $C$  geerdet. Am Widerstand  $R$  erzeugen sodann die Gleichstromanteile des Anodenstroms einen Spannungsabfall. Diese an  $R$  abfallende Spannung wird einem Oszillographen zugeführt. Wie eine TAYLOR-



wicklung zeigt, ist dieser Gleichstromanteil des Anodenstromes

$$\frac{1}{2} T_{12} U_{01} U_{02} \cos \varphi \quad (20)$$

wobei

$$T_{12} = \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial U_1 \partial U_2} \quad (20a)$$

die Ableitung des Anodenstromes nach den Gitterspannungen  $U_1$  und  $U_2$  ist.  $U_{01}$  und  $U_{02}$  sind die Gitterspannungsamplituden. Der Winkel  $\varphi$  bedeutet die Phase zwischen beiden Gitterspannungen  $U_1$  und  $U_2$ . Nun kann man sich leicht überlegen, daß der den Quarz anregende Strom gegen die bei  $E$  und damit am ersten

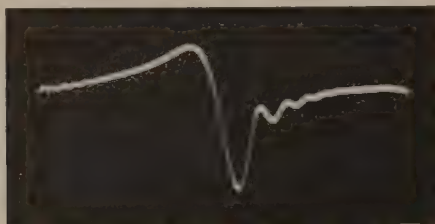


Abb. 6. Mit einem Frequenzhub  $\Delta\nu = 6 \text{ kHz}$  aufgenommene Kurve;  $\nu_w = 50 \text{ Hz}$ .

Steuergitter liegende Spannung um  $90^\circ$  phasenverschoben ist. Gemäß Gl. (12) ist  $\varphi$  für den Gitterspannungsanteil vom zweiten Steuergitter, der dem Imaginärteil von  $Fr(\gamma)$  proportional ist, gerade  $0^\circ$ , während der dem Realteil von  $Fr(\gamma)$  proportionale Anteil zu einem  $\varphi = 90^\circ$  gehört. Demnach ist die an  $R$  abfallende Spannung dem Imaginärteil von  $Fr(\gamma)$  proportional. Wenn man diese Spannung in einen Oszillo-

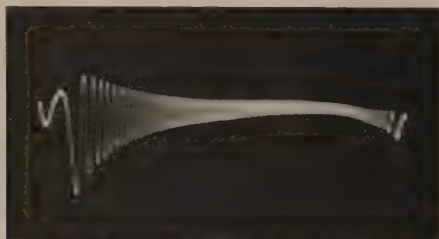


Abb. 7.  $\Delta\nu = 18 \text{ kHz}$ ;  $\nu_w = 50 \text{ Hz}$ .

graphen gibt, dessen Kippspannung die Reaktanzröhre des Oszillators steuert, dann erhält man auf seinem Bildschirm die Kurven für den Imaginärteil von  $Fr(\gamma)$ , wie man sie in den Abb. 1, 2, 3 und 4 für spezielle  $\alpha$ -Werte aufgezeichnet findet. Die Kippfrequenz des Oszillographen ist dann gleichzeitig auch die Wobelfrequenz des Oszillators. Dadurch hat man die Vorteile einer bequemen Änderungsmöglichkeit der Wobelfrequenz und hat stets gleich ein stehendes Bild.

### 3. Praktische Durchführung der Untersuchungen.

Man kann die Dämpfung  $\delta$ , die in den Realteil  $\alpha$  der komplexen Veränderlichen  $\gamma$  eingeht, nicht explizit darstellen. Deshalb ist es nicht ohne weiteres möglich aus beliebigen Kurvenformen auf die Dämpfung zu schließen, wenn man mit einer bestimmten festen Frequenzgeschwindigkeit arbeitet. Das wäre höchstens dann möglich, wenn man sich darauf beschränkte aus einer Anzahl vorher berechneter Kurven diejenige auszuwählen, die mit der beobachteten Kurve am besten übereinstimmt, und so durch Vergleich auf den gerade vorliegenden Wert der Dämpfung oder der Güte zu

schließen. Da aber gemäß (18a) nicht nur die Dämpfung  $\delta$  sondern auch die Frequenzgeschwindigkeit  $2a$  in den  $\alpha$ -Wert eingeht, kann man so verfahren, daß man nur eine einzige berechnete Vergleichskurve vorgibt und jetzt die Frequenzgeschwindigkeit  $2a$  solange ändert, bis die beobachtete Kurvengestalt mit dieser gegebenen Vergleichskurve übereinstimmt. Dann ist man sicher, daß das  $\alpha$  der berechneten Kurve dem  $\alpha$  der beobachteten Kurve gleich ist. Wenn  $\alpha$  nunmehr bekannt ist, braucht man nur noch die Frequenzgeschwindigkeit  $2a$  zu kennen, dann kann  $\delta$  errechnet werden. Genauer als nur der Kurvengestalt nach wird der  $\alpha$ -Wert eingestellt, indem man etwa das Verhältnis der Funktionswerte im ersten Maximum und ersten Minimum aus der errechneten Kurve entnimmt und auf dem Bildschirm des Oszillographen zwei Geraden markiert, die von der Nulllinie dieses Abstandsverhältnis haben. Man regelt dann solange, bis das erste Maximum und das erste Minimum auf diese Geraden fallen, natürlich bei geeigneter Einstellung der Oszillographenverstärkung. Die Frequenzgeschwindigkeit kann leicht innerhalb weiter Grenzen variiert werden. Das ist möglich einmal durch Regelung der Wobelfrequenz  $\nu_w$  des Senders (bzw. Kippfrequenz des Oszillographen) und zum anderen durch Änderung des Frequenzhubes  $\Delta\nu$  (bzw. der Kippspannungsamplitude). Bei Kenntnis dieser Größen hat man sofort die gesuchte Frequenzgeschwindigkeit

$$2a = 2\pi \nu_w \Delta\nu. \quad (21)$$

Man kann sich zur Ermittlung der Größe  $a$  auch eines Zeitmarkengebers bedienen. Mit Hilfe der Zeitmarken kann der Zeitabstand  $\Delta t$  zwischen dem ersten Maximum und dem ersten Minimum gemessen werden. Aus der vorgegebenen errechneten Kurve wird die zugehörige  $\beta$ -Differenz  $\Delta\beta$  auf der Abszisse entnommen und auf  $a$  über Gl. (18b) umgerechnet. Man hat dann

$$a = \frac{(\Delta\beta)^2}{(\Delta t)^2}. \quad (22)$$

Zusammen mit (18a) erhält man für die Dämpfung

$$\delta = \frac{2\alpha \Delta\beta}{\Delta t}. \quad (23)$$

Die Empfindlichkeit der Kurvengestalt gegenüber  $\alpha$ -Änderungen ist um den Wert  $\alpha = 0,5$  besonders groß. Deswegen ist es für die Genauigkeit der Gütebestimmungen günstig mit diesem Wert zu arbeiten, zumal (18a) für diesen Fall die einfache Form

$$\delta = a^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

annimmt. Mit diesem  $\alpha = 0,5$  wird auch der Ausdruck (23) für die Dämpfung sehr einfach:

$$\delta = \frac{\Delta\beta}{\Delta t}. \quad (25)$$

Wie man aus Abb. 2 sieht, ist das Verhältnis erstes Maximum zu erstem Minimum für  $\alpha = 0,5$  dem Betrage nach 0,43. Die zugehörige Abszissendifferenz dieser beiden ersten Extremwerte ist dann  $\Delta\beta = 2,0$ .

Die Abb. 6 und 7 zeigen Aufnahmen, die nach der beschriebenen Methode mit Quarzen hergestellt wurden. Um die zu so stark verschiedenen  $\alpha$ -Werten gehörigen Kurven darzustellen, hätte die Frequenzgeschwindigkeit  $2a$  in sehr weiten Grenzen geändert wer-



den müssen, wenn man mit einigermaßen konstanter Dämpfung gearbeitet hätte. Deshalb wurde die Dämpfung des verwendeten Quarzes zusammen mit der Frequenzgeschwindigkeit gleichfalls geändert, und zwar durch Einlegen eines Watteringes in die Quarzhalterung. In Abb. 7 schwingt der Quarz praktisch ohne eine solche zusätzliche Bedämpfung. Die Resonanzfrequenz des bei den Aufnahmen verwendeten Quarzes war  $\nu_0 = 500$  kHz, die Wobelfrequenz blieb konstant 50 Hz. Ein Vergleich der als Abb. 6 wiedergegebenen Aufnahme mit der für  $\alpha = 0,5$  errechneten Kurve, Abb. 2, zeigt deren gute Übereinstimmung, so daß man unter Benutzung der angegebenen Daten für Abb. 6 eine Güteziffer des künstlich bedämpften Quarzes von  $G \approx 1500$  ermitteln kann.

Die errechneten Kurven beziehen sich auf einen Schwingkreis bzw. Quarz, der anfänglich völlig in Ruhe ist. Wenn nun praktisch mit einer gewobbelten Anregungsfrequenz gearbeitet wird, sind die Schwingungen des Quarzes nach Ablauf einer Wobelperiode noch nicht wieder auf Null abgeklungen, d. h. die theoretischen Anfangsbedingungen sind nicht erfüllt. Wie die gemachten Aufnahmen zeigen, genügt es aber schon den Frequenzhub nicht allzu gering zu wählen. Je größer der Frequenzhub, desto genauer ist die Anfangsbedingung realisiert. Für  $\alpha = 0,7$  braucht auf der Abszisse nur eine  $\beta$ -Differenz von ungefähr dem Betrag 5 überstrichen zu werden. Für  $\alpha = 0,5$  und 0,1 kommt etwa ein  $\Delta\beta$  von 7 bzw. 15 in Frage, wie die Aufnahmen erkennen lassen. Diese begrenzte Wobeltiefe setzt der Genauigkeit der Gütebestimmung eine Schranke ebenso wie die Erzeugung einer zeitlich wirklich linear verlaufenden Anregungsfrequenz. Jedoch sind beides mehr oder weniger Fragen des apparativen Aufwandes. Zu einem Quarz der Güteziffer  $G = 10^4$  gehört nach (15) beispielsweise eine Dämpfung  $\delta = 50\pi$ , wenn man eine Resonanzfrequenz  $\nu_0 = 500$  kHz annimmt. Die Wobelfrequenz werde zu 20 Hz gewählt. Wie man aus den Gln. (24) und (21) sieht, gelangt man zu einem  $\alpha = 0,5$ , wenn der Frequenzhub  $\Delta\nu = 0,4$  kHz ist. Der Frequenzhub wird sofort größer, wenn man ein kleineres  $\alpha$  vorgibt. So erreicht man  $\alpha = 0,1$  unter sonst gleichen Bedingungen wie eben mit einem  $\Delta\nu = 10$  kHz.

### Schlußbetrachtungen.

Das beschriebene Verfahren läßt sich noch in verschiedener Weise weiter ausbauen. So könnte man auf eine gewobbelte Frequenz verzichten und den Quarz nur einmalig anregen, wodurch man eine Kurve erhielte, die der Bedingung der völligen Ruhe des Quarzes zu Beginn der Anregung genau entspricht. Nur kann dann die Registrierung der Kurve nicht mehr durch direkte Beobachtung geschehen, vielmehr müßte die Kurve jeweils photographisch aufgenommen werden. Es könnte etwa auch ein Thyatron zum Quarz parallelgeschaltet werden, das in dem Augenblick zündet und die Quarzschwingungen auslöscht, wenn die Kippspannung ihr Maximum erreicht, d. h. wenn  $\beta$  auf der Abszisse gerade den größten Wert hat. Damit ließe sich eine Genauigkeitssteigerung und eine Ausweitung des bequem meßbaren Gütebereichs nach höheren Güten hin erzielen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß mit den beschriebenen Mitteln auch die Verstimmung von Quarzen gegeneinander sehr genau untersucht werden kann. Man schaltet die Quarze einfach parallel. Sie werden dann zu Koppelschwingungen angeregt.

### Zusammenfassung.

Das Resonanzverhalten von Parallelschwingkreisen wird untersucht bei Anregung mit einer Frequenz, die sich linear mit der Zeit ändert. Dabei ergeben sich charakteristische Abweichungen vom stationären Fall, die um so stärker sind, je schneller sich die Anregungsfrequenz ändert und je höher die Güteziffer des Kreises ist. Auf Quarze, die in ihrer Halterung in Parallelresonanz erregt werden, kann man die Theorie dieser Erscheinungen anwenden und zu einer Gütebestimmung ausnutzen. Grundsätzlich lassen sich nach dieser Methode auch niedrigere Güteziffern von Kreisen mit Kondensator und Spule bestimmen.

**Literatur.** [1] HOK, G.: Journ. appl. Phys., 19, 242 (1948). — [2] MAYER, H.: Journ. de phys. et le Radium, 15, 8A (1954) (Physique Appliquée). — [3] BRUNNER, G., LÖSCHE, A.: Z. Physik 139, 569, (1954). — [4] FELDKELLER, R.: TFT, 29, 353 (1940). — [5] LÖSCHE, A.: Exp. Technik d. Physik (im Druck).

cand. phys. G. BRUNNER, Dr. A. LÖSCHE,  
Institut der Universität Leipzig.

## Gasströmungen hoher Unterschallgeschwindigkeit durch kurze Rohre im Druckbereich zwischen $10^{-2}$ und 10 Torr.

Von K. G. GÜNTHER, R. JAECKEL und G. W. OETJEN.

Mit 11 Textabbildungen.

(Eingegangen am 9. März 1954.)

### 1. Einleitung.

Unter den zahlreichen Problemen der Gasströmung durch Rohre im Vakuum interessiert technisch insbesondere die Frage der Strömung von Luft und Wasserdampf hoher Geschwindigkeit durch kurze Rohre; z. B. liegt vielfach das Problem vor, bei einer Destillation oder einer Vakuumtrocknung durch eine Rohrleitung möglichst große Mengen Luft bzw. Wasserdampf pro Zeiteinheit zu transportieren. Um dies zu erreichen, müssen zum Zwecke kleiner Strömungswiderstände die Verbindungsleitungen als kurze und weite Rohre ausgeführt und trotzdem gleichzeitig relativ hohe Druckdifferenzen angelegt werden.

Für die üblichen Rohrdurchmesser und bei Drucken von einigen Torr und darunter handelt es sich dabei stets um laminare Strömungsvorgänge. Bei Angaben über laminare Strömung kompressibler Medien hat man sich jedoch bisher nur auf solche Fälle beschränkt, in denen die Druckdifferenz zwischen den Rohrenden klein gegen den mittleren Druck und außerdem die Geschwindigkeitsverteilung bereits voll ausgebildet ist [1]–[5]. Dies ist aber nur bei langen Rohren und kleinen Strömungsgeschwindigkeiten hinreichend erfüllt.

Im folgenden wurden Rohrströmungen von Luft und Wasserdampf unter nachstehenden Bedingungen untersucht:



- a) Der mittlere Druck  $p$  liegt im Bereich  $10^{-2} \leq p \leq 10$  Torr.
- b) Die Druckdifferenz zwischen den Rohrenden soll vergleichbar sein mit dem mittleren Druck. Infolge dessen treten hohe Strömungsgeschwindigkeiten bis heran an die Schallgeschwindigkeit auf. Die Kompressibilität ist spürbar am Strömungsvorgang beteiligt.
- c) Das Verhältnis Rohrlänge zu Rohrdurchmesser soll etwa zwischen den Werten 1 und 50 liegen, d. h. die Einlaufvorgänge müssen berücksichtigt werden.
- Die untersuchten Strömungen bewegen sich also zwischen den beiden Grenzfällen der POISEUILLESchen Strömung in langen Rohren einerseits und der (reibungsfreien) Strömung durch eine Düse andererseits. Außerdem tritt in gewissen Anteilen die Molekularströmung hinzu.

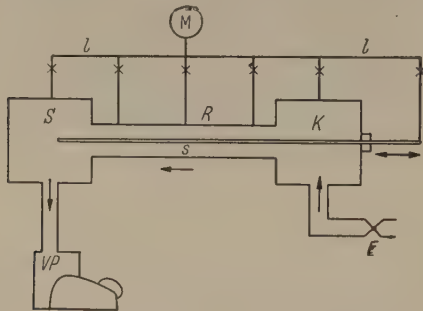


Abb. 1. Anordnung zur Erzeugung stationärer Rohrströmungen.  
*E* = Einlaßvorrichtung; *K, S* = Ausgleichskammern; *R* = Meßrohr;  
*VP* = Vorpumpe; *M* = Vakuummeßinstrument; *l* = umschaltbare  
 Verbindungsleitungen; *s* = coaxiale Drucksonde.

#### Verzeichnis der benutzten Symbole.

Symbol	Bedeutung	Dimension
$a$	Rohrradius	cm
$\alpha$	Wärmeübergangszahl	cal/cm <sup>2</sup> sec grad
$c_p$	spez. Wärme bei konst. Druck	cal/g grad
$d$	Rohrdurchmesser $2a$	cm
$\eta$	Zähigkeit	g/cm sec
$F$	Rohrquerschnitt $a^2 \cdot \pi$	cm <sup>2</sup>
$G$	Durchflußmenge	g/h
$i$	Enthalpie	cal/g
$\kappa$	adiabatischer Expansions- koeffizient	—
$L$	Rohrlänge	cm
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	cal/grad cm sec
$M$	Molekulargewicht	g/Mol
$m$	polytropher Expansionskoeffiz.	—
$p$	Druck	dyn/cm <sup>2</sup> ; Torr
$v$	Durchflußmasse pro Flächen- einheit $G/F$	g/h cm <sup>2</sup>
$R$	allgemeine Gaskonstante	$= 8,3166 \cdot 10^7$ erg/grad
$\rho$	spez. Gewicht	g/cm <sup>3</sup>
$w$	Geschwindigkeit	cm/sec
$w_c$	kritische Geschwindigkeit	cm/sec
$z$	Koordinate in Richtung der Rohrachse	—

#### Indices:

$K$	Zustand in der Kammer <i>K</i>	—
$0$	im Rohreingang ( $z = 0$ )	—
$z$	an der Stelle $z$	—
$L$	in der Rohrmündung ( $z = L$ )	—
$S$	in der Kammer <i>S</i>	—
$c$	am Orte der kritischen Geschwindigkeit	—

## 2. Experimentelle Untersuchung.

### Anordnung.

Zur Erzeugung stationärer Gasströmungen diente die in Abb. 1 schematisch dargestellte Anordnung. Das Gas wurde durch die Einlaßvorrichtung *E* unter Ex-

pansion in die Vorkammer *K* eingeblasen und nach Durchströmen des Meßrohres *R* von der an der Kammer *S* angeschlossenen Vakuumpumpe *VP* abgesaugt.

Als strömende Medien kamen Luft und überhitzter Wasserdampf in Anwendung. Die Luft wurde — ausgehend von Atmosphärendruck — über ein Nadelventil zugeführt. Die Zufuhr von Wasserdampf erfolgte über ein Vakuumeckventil aus einem vorgeschalteten Verdampfer *V* (vgl. Abb. 2), der Dampfmengen bis zu 2000 g/h bei konstantem Ausgangsdruck (10 bis 20 Torr) liefern konnte. Die Kondensation des durchgesetzten Wasserdampfes erfolgt an einer in der Kammer *S* eingebauten und mit flüssiger Luft beschickten Kühlfalle. Dadurch ließen sich wesentlich größere Saugleistungen erzielen und entsprechend weitere Rohre untersuchen. Die Pumpe *VP* diente in diesem Falle nur zum Entfernen des Restgases.

### Eigenschaften der erzeugten Strömungen.

Es wurden bei verschiedenen Rohrlängen und -durchmessern die Durchflußmengen und die Druckverteilung längs der Rohre jeweils in Abhängigkeit vom Druck an der Einlaufseite gemessen.

Die Rohrströmungen wurden dadurch definiert, daß für die Strömungsgeschwindigkeit am Einlauf praktisch der Wert 0 und am Rohrende die der dortigen Temperatur zugeordnete Schallgeschwindigkeit (kritische Geschwindigkeit  $w_c$ ) als mittlere Geschwindigkeit über den ganzen Querschnitt eingestellt wurde. Dies konnte erreicht werden, indem einerseits die Vorkammer *K* einen hinreichend großen Querschnitt erhielt und andererseits der Druck  $p_S$  in der Kammer *S* stets unterhalb eines kritischen Wertes  $p_{krit}$  gehalten wurde. Senkt man nämlich bei festgehaltenem Ausgangsdruck  $p_K$  den Enddruck  $p_S$ , so steigt die Strömungsgeschwindigkeit und erreicht schließlich im Rohrende die kritische Geschwindigkeit  $w_c$  ( $p_S = p_{krit}$ ). Wird darüber hinaus  $p_S$  weiter vermindert ( $p_S < p_{krit}$ ), so hat dies bei den benutzten Rohren konstanten Querschnittes auf die Strömungsgeschwindigkeit und Durchflußmenge keinen Einfluß mehr. Beide Größen haben ihren Maximalwert  $w_c$  bzw.  $G_{max}$  erreicht.

Dank dieser Maßnahmen war der Strömungsverlauf unabhängig von  $p_S$  und ließ sich allein durch entsprechende Öffnung der Einlaßvorrichtung *E* einstellen und regulieren. Die Gastemperatur  $T_K$  innerhalb der Kammer *K* war praktisch gleich der Außentemperatur  $T_A$ . Dies folgt für  $w_K = 0$  unmittelbar aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, sofern die Gastemperatur  $T_1$  vor der Expansion in *E* der Außentemperatur gleich ist. Dies war jedoch dank der langen Zuführungsleitung auch für Wasserdampf mit Sicherheit erfüllt. Gleichzeitig läßt sich aus der Dampfdruckkurve  $p(T)$  für Wasserdampf entnehmen, daß für die während der Messung eingehaltenen Bedingungen ( $p_L \leq 1$  Torr;  $T_A = 293^\circ \text{K}$ ) keine Kondensation des Dampfes innerhalb der Kammer *K* oder des Rohres

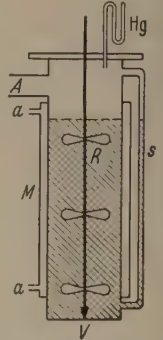


Abb. 2. Verdampfer zur Erzeugung von Wasserdampf.

*V* = Verdampfergefäß; *M* = wasser-durchströmter Heizmantel; *a* = Stutzen zum Anschluß eines Thermostaten; *R* = Rührflügel zur Durchmischung des eingefüllten Wassers; *S* = Schaulrohr zur Ablesung des Wasserspiegels; *Hg* = Quecksilbermanometer; *A* = Auslaßöffnung.



$R$  erwartet werden konnte. Die Voraussetzung „überhitzer Wasserdampf“ war also stets erfüllt.

Die Meßrohre  $R$  wurden teils mit scharfkantigem, teils mit gut abgerundetem Einlauf versehen. Ein Einfluß der Einlauform auf die Durchflußmenge konnte dabei nicht festgestellt werden. Eine evtl. auftretende Strahlkontraktion ist im untersuchten Druckbereich bezüglich des Strömungswiderstandes also von untergeordneter Bedeutung.

Die Dimensionen der benutzten Meßrohre sind in Tab. 1 aufgeführt:

Tabelle 1.

Rohr	$d$ (cm)	$L$ (cm)	Rohr	$d$ (cm)	$L$ (cm)
$R_1$	1,5	9,8	$R_7$	2,0	5,9
$R_2$	2,0	82,5	$R_8$	2,0	3,1
$R_3$	2,0	62,5	$R_9$	3,0	29,5
$R_4$	2,0	40,0	$R_{10}$	3,0	19,5
$R_5$	2,0	20,0	$R_{11}$	3,0	9,8
$R_6$	2,0	9,9	$R_{12}$	4,2	49,8
			$R_{13}$	7,0	60,3

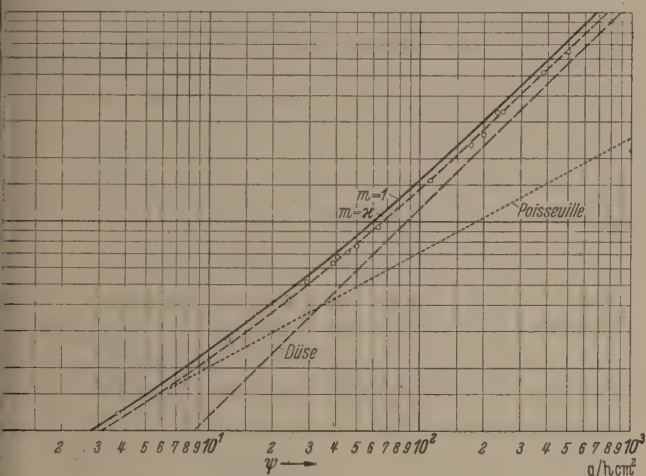


Abb. 3. Spezifische Durchflußmenge  $\psi$  in Abhängigkeit vom Ausgangsdruck  $p_K$  für Wasserdampf.

$\psi = f(p_K)$  für Wasserdampf

○ Meßwerte für Rohr  $R_6$

—  $m=1$  } berechnet nach Formel (1).  
- - -  $m=\infty$  }

### Meßmethoden.

**Druckmessung.** Als Normalinstrument zur Druckmessung diente ein absolut geeichtes Vakuummeter nach McLEOD mit einem Meßbereich von  $10^{-3}$  bis 10 Torr. Zur Druckbestimmung bei Anwesenheit von Wasserdampf wurde das gesamte Kompressionsvolumen mittels Strahlungsheizung auf eine Temperatur von etwa  $60^\circ\text{C}$  erhitzt, so daß jede Kondensation vermieden und ein Verhalten des Dampfes im Meßraum wie ein ideales Gas sichergestellt wurde. Die Temperaturgleichheit im gesamten Volumen während der Messung wurde durch Thermolemente kontrolliert, die an verschiedenen Stellen der geschwärzten Glaswand angebracht worden waren.

Die auf diese Weise angezeigten Drucke haben wir außerdem verglichen mit den Meßwerten, die unter Zwischenschalten eines Luft-Puffervolumens zwischen McLEOD und Wasserdampfatmosphäre erhalten wurden. Die nach beiden Verfahren gewonnenen Meßwerte zeigten gute Übereinstimmung.

Mit dem so ausgestatteten Instrument wurde ein Alpatron geeicht, das eine weit bequemere und außerdem kontinuierliche Druckmessung erlaubt und daher

zur Durchführung der eigentlichen Untersuchungen Anwendung fand. Dabei wurde das Instrument wechselweise mit verschiedenen Bohrungen in der Wandung des Rohres  $R$ , der Kammern  $K$  und  $S$ , sowie mit einer Sonde  $s$  (dünnes Hohlrohr mit seitlicher Bohrung) verbunden, die in der Rohrachse verschoben werden konnte, ohne die Rohrströmung spürbar zu beeinflussen (vgl. Abb. 1). Ein Vergleich zwischen den in der Rohrachse und an der Rohrwand im gleichen Querschnitt  $z$  gemessenen Drucken zeigte keinerlei

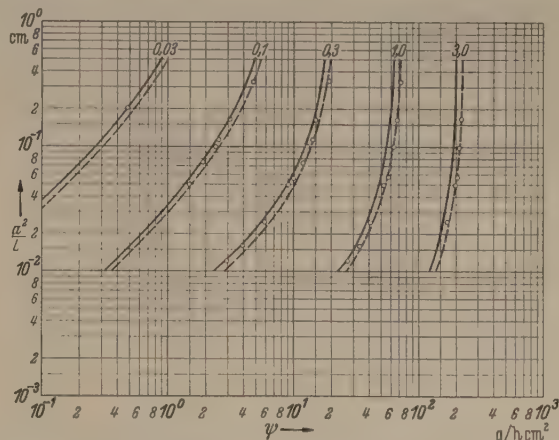


Abb. 4. Spezifische Durchflußmenge  $\psi$  für Wasserdampf in Abhängigkeit von den Rohrdimensionen  $a^2/L$  und dem Kesseldruck  $p_K$  (als Parameter in Torr)

$\psi = f\left(\frac{a^2}{L}, p_K\right)$  nach Formel (1) für Wasserdampf

○ Meßwerte

—  $m=1$  } berechnet nach Formel (1).  
- - -  $m=\infty$  }

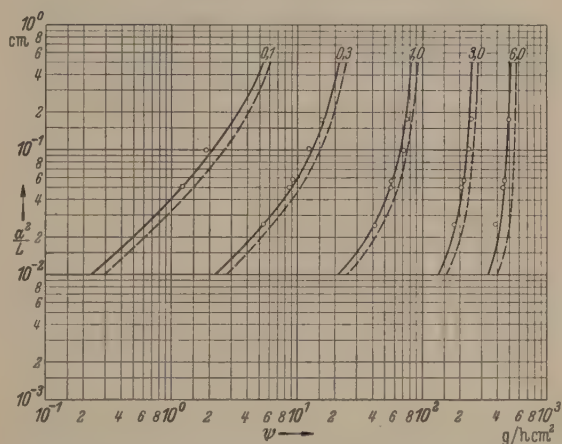


Abb. 5. Spezifische Durchflußmenge  $\psi$  für Luft in Abhängigkeit von den Rohrdimensionen  $a^2/L$  und dem Kesseldruck  $p_K$  (als Parameter in Torr)

$\psi = f\left(\frac{a^2}{L}, p_K\right)$  nach Formel (1) für Luft

○ Meßwerte

—  $m=1$  } berechnet nach Formel (1).  
- - -  $m=\infty$  }

Unterschied zwischen beiden Werten, d. h. zwischen radial verschiedenen Stellen bei der Druckentnahme. Im folgenden wurden daher die Rohrdrucke allein an Bohrungen in der Rohrwand entnommen. Aus der Meßgenauigkeit des McLEOD und den Schwankungen der Eichgeraden des Alpatrons bei den wiederholt vorgenommenen Eichungen konnte der relative mittlere Fehler der Druckmessung auf etwa  $\pm 8\%$  abgeschätzt werden.

**Messung der Durchflußmenge.** Für Wasserdampf konnte die pro Zeiteinheit abgesaugte Dampfmenge unmittelbar aus der Sinkgeschwindigkeit des Wasserspiegels im Verdampfer  $V$  berechnet werden (vergleiche



Abb. 2). Für Luft erfolgte die Messung der Durchflußmenge mit einem der für die Sauggeschwindigkeitsmessung von Vakuumpumpen üblichen Geräte, welches zu diesem Zweck dem Einlaßventil  $E$  vorgeschaltet wurde. Die Meßgenauigkeit betrug in beiden Fällen etwa  $\pm 3\%$ .

### Meßergebnisse.

Die Resultate unserer Messungen über die Durchflußmasse pro Flächeneinheit  $\psi$  in Abhängigkeit vom Kammerdruck  $p_K$  und von den Abmessungen der Rohrleitung  $\frac{a^2}{L}$  sind in den Abbildungen 3, 4 und 5 eingetragen. Die ausgezogenen bzw. gestrichelten Kurven zeigen gleichzeitig, daß sich diese Meßwerte durch eine geschlossene Formel von der Form

$$\psi = \frac{M a^2 \frac{m}{m+1}}{R T_0 L 8 \eta} \left\{ p_0^2 - p_L^2 \left( \frac{p_0}{p_L} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right\} \left( 1 + \frac{\psi}{6 \eta m} \frac{a^2}{L} \ln \frac{p_0}{p_L} \right) \quad (1)$$

darstellen lassen. Über die Herkunft dieser Formel siehe weiter unten unter 4.1.

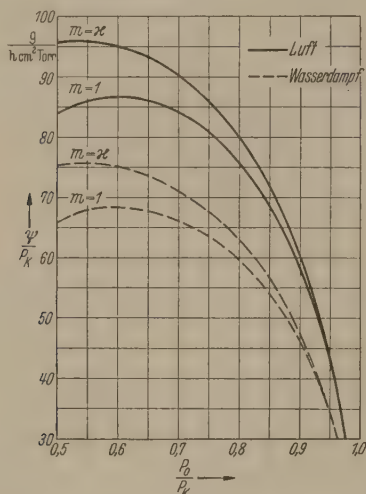


Abb. 6. Darstellung von Formel (4) in Kurvenform zur numerischen Berechnung des Druckes  $p_0$  im Rohreingang aus dem Ruhedruck  $p_K$ .

## 3. Formelmäßige Behandlung des Problems.

### Grenzfälle.

Wesentlich an der Formel (1) ist das Glied

$$\left( 1 + \frac{\psi}{6 \eta m} \frac{a^2}{L} \ln \frac{p_0}{p_L} \right)$$

im Nenner. Dadurch wird die am strömenden Gas zu leistende Beschleunigungsarbeit berücksichtigt und somit das Übergangsgebiet zwischen der POISEUILLEschen und der Düsenströmung beschrieben.

Beide Grenzfälle lassen sich aus Gl. (1) durch die Grenzübergänge  $L \rightarrow 0$  bzw.  $L \gg \frac{\psi}{6 \eta m} a^2 \ln \frac{p_0}{p_L}$  gewinnen.

a) Für große Rohrlängen  $L \gg \frac{\psi a^2}{6 \eta} \ln \frac{p_0}{p_L}$  und isotherme Expansion ( $m = 1$ ) geht Gl. (1) über in

$$\psi = \frac{M a^2}{R T_0 \cdot 16 \eta L} (p_0^2 - p_L^2).$$

Dies ist aber die bekannte Formel nach HAGEN-POISEUILLE für laminare Strömung in langen Rohren.

b) Im Falle  $L = 0$  findet man aus Gl. (1) durch Grenzübergang ( $p_0 \rightarrow p_L$ ) und  $m = \infty$

$$\psi_c = \frac{3}{4} \kappa p_0^2 \frac{M}{R T_0}. \quad (2)$$

Die Rohrströmung ist in eine Strömung durch eine Blende übergegangen, wobei  $p_0$  und  $T_0$  Druck und Temperatur in der Blendenöffnung bedeuten. Führt man statt ihrer Kesseldruck  $p_K$  und Temperatur  $T_K$

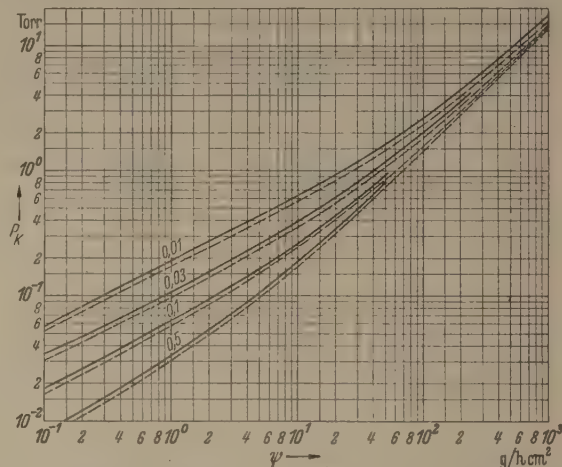


Abb. 7. Spezifische Durchflußmenge  $\psi$  für Wasserdampf in Abhängigkeit vom Ausgangsdruck  $p_K$  und den Rohrdimensionen  $a^2/L$  (als Parameter)

$$\psi = f \left( p_K, \frac{a^2}{L} \right) \text{ nach Formel (1) für Wasserdampf}$$

—  $m = 1$  } berechnet nach Formel (1).  
 ---  $m = \infty$  }

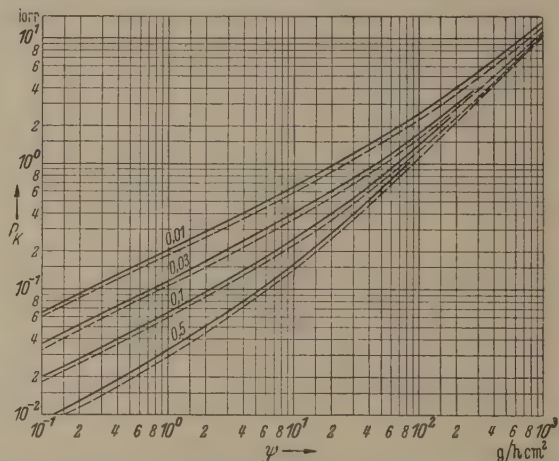


Abb. 8. Spezifische Durchflußmenge  $\psi$  für Luft in Abhängigkeit vom Ausgangsdruck  $p_K$  und den Rohrdimensionen  $a^2/L$  (als Parameter)

$$\psi = f \left( p_K, \frac{a^2}{L} \right) \text{ nach Formel (1) für Luft}$$

—  $m = 1$  } berechnet nach Formel (1).  
 ---  $m = \infty$  }

am Orte der Geschwindigkeit  $w_K = 0$  ein vermöge der Energiegleichung, so erhält man aus Gl. (2)

$$\psi_c = \sqrt{\frac{3}{4}} p_K r^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2 \kappa}{(\kappa - 1)} \frac{M}{R T_K} \left( 1 - r^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)}; \left( r = \frac{p_0}{p_K} \right). \quad (3)$$

Letzteres führt jedoch nur bis auf einen Faktor  $\sqrt{\frac{3}{4}}$  auf die bekannte Düsenformel. Dieser Faktor rührt aber gerade von der Berücksichtigung der in Wirklichkeit stets vorhandenen Reibung her<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Quantitative empirische Angaben über den Reibungseinfluß bei Düsenströmungen finden sich bei БОСНАКОВИЧ [7].



Praktische Berechnung der Durchfluß-  
mengen.

Zur praktischen Berechnung der Durchflußmenge und zum Vergleich der Gl. (1) mit den durchgeführten Messungen muß der Druck  $p_0$  im Rohreingang durch den Ruhedruck  $p_K$  in der Kammer  $K$  ( $w_K = 0$ ) ausgedrückt werden. Zu diesem Zweck kann man den Rohreingang als eine dem eigentlichen Rohr vorgesetzte Blende betrachten, in deren Ebene der Druck  $p_0$  herrscht, so daß sich zwischen  $p_0$ ,  $p_K$  und  $\psi$  nach den Ausführungen in Abschnitt 3 (Grenzfälle) die Beziehung (3) ergibt; durch Auflösen nach  $\left(\frac{\psi}{p_K}\right)^2$  erhält man daraus

$$\left(\frac{\psi}{p_K}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2m}{m-1} \frac{M}{RT_K} \left\{ \left(\frac{p_0}{p_K}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p_0}{p_K}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right\}. \quad (4)$$

Die graphische Darstellung dieser Funktion in Abb. 6 kann zur numerischen Ermittlung von  $p_0$  dienen.

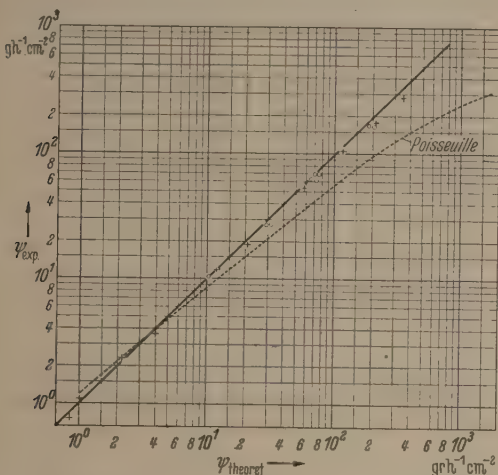


Abb. 9. Vergleich zwischen den gemessenen  $v_{Exp}$  und berechneten  $v_{Theoret}$ . Werten der spezifischen Durchflußmengen von Luft und Wasserdampf für den Fall:  $w_L < w_c$

Rohrdimensionen:

$$\left. \begin{array}{l} L = 30 \text{ cm} \\ d = 3 \text{ cm} \\ L = 50 \text{ cm} \\ d = 4,2 \text{ cm} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} + \text{ für Luft berechnet mit } m = 1 \\ \circ \text{ für Wasserdampf berechnet mit } m = 1 \\ \circ \text{ für Wasserdampf berechnet mit } m = \infty \end{array} \right. \\ \text{für Wasserdampf berechnet mit } m = 1. \end{array}$$

Analog ist die Temperatur  $T_0$  durch die Kammer-  
temperatur  $T_K$  zu ersetzen vermöge der Gleichung

$$T_0 = T_K \left(\frac{p_0}{p_K}\right)^{\frac{m-1}{m}}. \quad (5)$$

Wird in der Rohrmündung die kritische Geschwindigkeit erreicht, so wird die Durchflußmenge  $\psi$  ein Maximum. Dann läßt sich auch der Druck  $p_L$  im Rohrende vermöge Gl. (6)

$$p_L = \frac{RT_L}{w_c M} \cdot \psi = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{2RT_K}{m(m+1) \cdot M}} \cdot \psi \quad (6)$$

aus Gl. (1) eliminieren, so daß die Durchflußmenge allein durch den Kammerdruck  $p_K$  gegeben ist.

Gewinnt im Gebiet kleiner Drücke ( $2 \cdot p \cdot a \leq 0,56$  Torr · cm) neben der Gasströmung auch die Gasdiffusion an Bedeutung, so ist zu dem aus Gl. (1) berechneten Wert noch der KNUDSENSCHE Diffusionsanteil [2]

$$\psi_D = \frac{\frac{4}{3} \frac{a}{\pi L} \sqrt{\frac{2\pi M}{RT}} \cdot J(a, p)}{1 + 2,66 \frac{a}{L}} (p_0 - p_L) \quad (7)$$

mit

$$J(a, p) = \frac{1 + 2c_1 p}{1 + 2,47 c_1 p}; \quad c_1 = \frac{a}{\eta} \sqrt{\frac{M}{RT}}; \quad 0,81 \leq J \leq 1$$

hinzuzufügen.

In den Abbildungen 7 und 8 ist schließlich die unter Benutzung der Gl. (1), (4) und (6) errechnete Durchflußmenge in Abhängigkeit vom Kammerdruck  $p_K$  für verschiedene Parameter  $a^2/L$  graphisch dargestellt. [Der Anteil der KNUDSENSCHEN Molekularströmung ist in diesen Werten noch nicht enthalten und muß vermöge Gl. (7) gesondert ermittelt und hinzugefügt werden.] Da es sich um implizite Gleichungen handelt

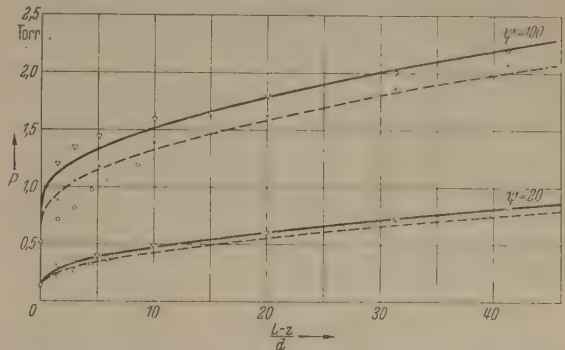


Abb. 10. Der Druckverlauf im Rohr (Wasserdampf).  $\circ$  gemessen an der Rohrwand;  $\nabla$  gemessen in der Kammer  $K$ ;  $\times$  berechnet aus  $p_K$ ; — berechnet für  $m = 1$ ; - - - berechnet für  $m = \infty$ .

mußte die Berechnung unter Zuhilfenahme der Abb. 6 schrittweise in successiver Näherung erfolgen. Im allgemeinen genügten jedoch 2 bis 3 Schritte für jeden Funktionswert  $\psi$ . Die Ausführung dieser Rechnung erfolgte für Luft und Wasserdampf jeweils unter An-

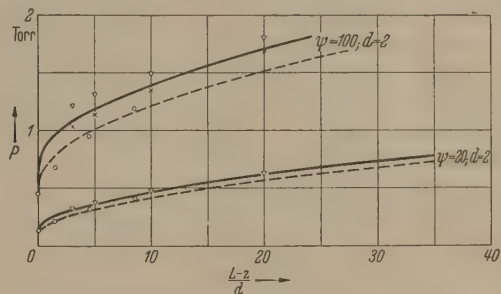


Abb. 11. Der Druckverlauf im Rohr (Luft).  $\circ$  gemessen an der Rohrwand;  $\nabla$  gemessen in der Kammer  $K$ ;  $\times$  berechnet aus  $p_K$ ; — berechnet für  $m = 1$ ; - - - berechnet für  $m = 1,4$ .

nahme adiabatischer sowie isothermer Expansion. Man erkennt, daß die Unsicherheit bezüglich der Polytropenkoeffizienten  $m$  das Ergebnis nicht wesentlich beeinflusst.

In Abb. 3 sind die unter Benutzung des Rohres  $R_6$  (Tab. 1) für verschiedene Kammerdrücke und für den Fall  $w_L = w_c$  gemessenen Durchflußmengen  $\psi$  den nach den oben abgeleiteten Formeln errechneten Werten gegenübergestellt. Vergleichsweise sind die nach POISEUILLE und auf Grund der Düsenformel ermittelten Durchflußmengen ebenfalls eingetragen. Man erkennt, wie der errechnete Übergang zwischen den beiden Grenzfällen mit den Meßwerten gut übereinstimmt, und zwar liefert für kleine Durchflußmengen die Rechnung mit  $m = 1$ , für große Durchflußmengen diejenige mit  $m = \infty$  die bessere Übereinstimmung. Dies entspricht durchaus den Vorstellungen, die man durch



Abschätzung der dem strömenden Gas zugeführten Wärmemengen gewinnt [6].

Mit zunehmendem Kammerdruck laufen die Meßwerte gegen eine Asymptote, die nicht mit der nach der Düsenformel errechneten Geraden übereinstimmt, sondern parallel zu dieser in Richtung kleinerer Durchflußmengen verschoben ist. Der Betrag dieser Verschiebung entspricht etwa dem bereits erwähnten Faktor  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ .

In den Abb. 4 und 5 sind die in Abhängigkeit vom Quotienten  $a^2/L$  für Luft und Wasserdampf errechneten Durchflußmengen unter Verwendung des Kammerdruckes  $p_K$  als Parameter aufgetragen und den empirischen Werten gegenübergestellt. Zur Gewinnung der Letzteren wurden die mit den verschiedenen Rohren der Tab. 1 gemessenen Durchflußmengen nach Art der Abb. 3 aufgetragen, so daß auf die in Abb. 4 und 5 als Parameter gewählten Drucke interpoliert werden konnte. Die Anteile der KNUDSENSchen Molekularströmung wurden sodann nach Gl. (7) ermittelt und in Abzug gebracht, so daß nur die reinen Strömungsanteile zum Vergleich kamen.

Man erkennt wiederum, daß für Wasserdampf mit zunehmender Durchflußmenge und abnehmender Rohrlänge die Meßwerte in Richtung der für  $m = \infty$  errechneten Werte wandern. Für Luft zeigt sich ein ähnliches Verhalten, jedoch sind hierbei sämtliche Meßwerte dem für isotherme Expansion errechneten Verlauf stärker angenähert. Berücksichtigt man die gegenüber Wasserdampf kleinere Wärmekapazität bzw. größere Zähigkeit der Luft, so wird dieses Verhalten verständlich.

Um Gl. (1) auch für den Fall  $w_L < w_c$  zu prüfen, wurden einige Messungen bei geringerem Druckgefälle unter gleichzeitiger Bestimmung von Durchflußmenge und Anfangs- sowie Enddruck durchgeführt. Die durch Einsetzen dieser Drucke aus Gl. (1) errechneten Durchflußmengen sind in Abb. 9 den gemessenen Werten gegenübergestellt.

In den Abb. 10 und 11 wird schließlich der aus Gl. (1) errechnete Druckverlauf  $p(z)$  mit den Meßwerten verglichen. Für große Durchflußmengen und große Strömungsgeschwindigkeiten (nahe der Rohrmündung) liegen die an der Rohrwand gemessenen Drucke noch unterhalb der für  $m = \infty$  berechneten, während sich die halbempirischen, aus den Kammerdrücken  $p_K$  nach Gl. (4), Abb. 6 berechneten Drucke zwischen dem mit  $m = \infty$  bzw.  $m = 1$  berechneten Verlauf bewegen.

#### Herleitung der Formel (1) für die Durchflußmenge $\psi$ .

Zur Herleitung dieser Näherungsformel für die untersuchten Strömungsvorgänge wurde unter Vernachlässigung der Strömung senkrecht zur Rohrachse, die überall klein ist zur Strömung parallel zur Rohrachse, von den allgemeinen Strömungsgleichungen nach NAVIER-STOKES (8), (9), der Kontinuitätsgleichung (10) und der Gasgleichung (11) ausgegangen. Diese wurden für den hier interessierenden Fall stationärer Rohrströmungen unter Benutzung von Zylinderkoordinaten folgendermaßen angeschrieben:

$$\varrho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (8)$$

sowie

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\eta}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r}; \quad \frac{\partial p}{\partial \psi} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\varrho = \frac{M}{R T} \cdot p = \frac{M}{R T_0} \cdot p_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{m}}; \quad (1 \leq m \leq \infty). \quad (11)$$

Der Einfluß der Schwerkraft war in jedem Fall verschwindend klein und wurde vernachlässigt.

Zur Separation der Variablen wurden folgender Ansatz

$$w(r, z) = \psi(r) \cdot \Phi(z)$$

mit

$$\psi(r) = \frac{1}{4} (a^2 - r^2)$$

versucht, d. h., es wurde die gleiche parabolische Geschwindigkeitsverteilung angesetzt, wie sie auch bei der POISEUILLESchen Strömung herrscht. Dadurch war es möglich, über den Rohrquerschnitt zu integrieren und die Größen  $\varrho$  und  $p$  durch die über den Rohrquerschnitt gemittelten Werte  $\bar{\varrho}$  und  $\bar{p}$  zu ersetzen<sup>1</sup>, so daß die Ausgangsgleichungen (8), (9), (10) und (11) in die eine Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \left\{ \frac{\psi a^2}{6 \Phi} - \frac{m A^m}{\Phi^{m+2}} \right\} + \eta \left\{ 1 - \frac{a^2}{6 \Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\} = 0 \quad (12)$$

mit

$$A = 8 \psi R T_0 / \left( M a^2 p_0^{\frac{m-1}{m}} \right)$$

übergeführt werden konnten.

Schreibt man das zweite Glied in Gl. (12) in der Form  $\eta (1 - \varepsilon)$ , so läßt sich zeigen, daß unter gewissen Voraussetzungen<sup>2</sup>  $\varepsilon \ll 1$  ist (d. h. die Geschwindigkeit steigt in Richtung der Rohrachse nahezu linear mit  $z$  an) und somit Gl. (12) ersetzt werden kann durch die Näherungsform

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \left\{ \frac{\psi a^2}{6 \Phi} - \frac{m A^m}{\Phi^{m+2}} \right\} + \eta = 0. \quad (13)$$

Führt man in Gl. (13) statt  $\Phi$  wieder den Druck  $p$  ein, so geht Gl. (13) über in

$$\frac{\partial p}{\partial z} \left\{ \frac{1}{A} - \frac{\psi a^2}{6 \kappa p} \right\} + \eta = 0 \quad (14)$$

und durch Integration und Ersetzung der Abkürzung  $A$  ergibt sich schließlich für die spezifische Durchflußmenge  $\psi$

$$\psi = \frac{M a^2 \frac{m}{m+1}}{R T_0 \cdot 8 \eta L} \cdot \frac{\left\{ p_0^2 - p_L^2 \left( \frac{p_0}{p_L} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right\}}{\left( 1 + \frac{\psi a^2}{6 \eta L m} \ln \frac{p_0}{p_L} \right)}. \quad (15)$$

Bei der Herleitung dieser Formel haben wir einige vereinfachende Annahmen gemacht, ohne diese näher zu begründen oder zu diskutieren.

Wie weiter oben aber schon gesagt wurde, stimmen die gemessenen Werte befriedigend mit den nach Gl. (1) errechneten Werten überein. Dies ist ein Hinweis dafür, daß Gl. (1) in dem hier untersuchten Bereich eine brauchbare Näherungslösung darstellt.

<sup>1</sup> Die Querstriche entfallen im folgenden der Einfachheit halber wieder.

<sup>2</sup> Die Vernachlässigung der Größe  $\varepsilon$  ist statthaft, solange die mittlere Strömungsgeschwindigkeit nicht in die unmittelbare Nähe der kritischen Geschwindigkeit kommt.



### Zusammenfassung.

Es wurden die Leitungswiderstände von Rohren für laminare Strömungen von Luft und überhitztem Wasserdampf hoher Unterschallgeschwindigkeit behandelt, deren Ermittlung zur Beurteilung der Drosselwirkung kurzer Rohrstücke in der Vakuumtechnik von besonderer Bedeutung ist.

Das untersuchte Strömungsgebiet liegt zwischen den beiden Grenzfällen der POISEUILLESchen Rohrströmung und der Düsenströmung und ist deswegen wenig geklärt, weil Beschleunigungsarbeit, Kompressibilität und Reibungs- sowie Diffusionsanteil zugleich die Art des Gastransportes bestimmen. Experimentell wurden die untersuchten Rohrströmungen dadurch definiert, daß vor dem Rohreingang die Strömungsgeschwindigkeit auf den Wert 0 und in der Rohrmündung die Schallgeschwindigkeit eingestellt wurde. Auf diese Weise wurden Rohre mit Durchmessern zwischen 1,5 und 7 cm und Längen zwischen 3 und 80 cm in einem Druckbereich zwischen  $10^{-2}$  und 10 Torr untersucht. Die Durchflußmengen bewegten sich zwischen 1 und 2000 g/h.

Formelmäßig gelang es, in geschlossener Form eine Näherungslösung der auf dieses Problem angewandten NAVIER-STOKESschen Differentialgleichungen zu gewinnen, die bei Kenntnis von Rohrdimensionen, anliegenden Drucken und Gasart die Durchflußmenge zu berechnen gestattet. Die hierzu gemachten Voraussetzungen waren die folgenden:

Parabolische Geschwindigkeitsverteilung in radialer Richtung;

nahezu linearer Geschwindigkeitszuwachs in Richtung der Rohrachse.

Für niedrige Drucke ist der Anteil der KNUDSENschen Molekularströmung zu dem so berechneten Ausdruck hinzuzufügen. Ein Vergleich zwischen formelmäßiger Darstellung und Experiment zeigte sowohl für die Durchflußmenge als auch für den Druckverlauf längs des Rohres befriedigende Übereinstimmung in den untersuchten Bereichen. Dabei lagen die Meßwerte zwischen den beiden für isotherme bzw. adiabatische Expansion berechneten Ergebnissen und näherten sich den letzteren mit steigendem Durchsatz und abnehmenden Rohrlängen an, für Wasserdampf stärker ausgeprägt als für Luft.

**Literatur.** [1] JAECKEL, R.: Kleinste Drucke, ihre Messung und Erzeugung, Springer-Verlag, Berlin 1950. — [2] DUSHMAN, S.: Scientific Foundations of Vacuum Techniques, Wiley & Sons, New York 1949. — [3] MÖNCH, G.: Hochvakuumtechnik, R. A. Lang-Verlag, Pößneck 1950. — [4] GUTHRIE, A. u. R. K. WAKERLING: Vacuum Equipment and Techniques, McGraw Hill Book Co., New York 1950. — [5] NORMANDÉ, C. H.: Design of High Vacuum Systems, The Cambridge High Vacuum Symposium 1947. — [6] SCHACK, A.: Der industrielle Wärmeübergang, Verlag Stahleisen, Düsseldorf 1948. — [7] BOSJNAKOVIC, FR.: Techn. Thermodynamik, Bd. I, Leipzig, Th. Steinkopff 1950.

Dipl. Phys. K. G. GÜNTHER, Prof. Dr. R. JAECKEL,  
Dr. G. W. OETJEN,

Physikalisches Institut der Universität Bonn, Abteilung  
Vakuum und Leybold-Hochvakuum-Anlagen G.m.b.H.

## Über eine Verfeinerung der Theorie der Ausbreitung langer elektrischer Wellen um die Erde\*.

Von JULIUS WEIDNER.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 24. Mai 1954.)

Das hier diskutierte Problem wurde erstmalig von G. N. WATSON [1] allgemein gelöst. Aus dessen Formeln leitete SCHUMANN für sehr lange Wellen eine einfache Näherungsformel für das Grundfeld ab [2].

In dieser Arbeit soll jene verfeinert werden. In der SCHUMANNschen Arbeit [2] ist die Zahl der Glieder der auftretenden Summen nach der WATSONschen Transformation auf eines reduziert. Wir wollen hier untersuchen, inwieweit die SCHUMANNsche Formel durch Erweiterung auf 2 Glieder geändert wird.

Für ideal leitende Ionosphäre knüpfen wir an die Gl. (7) f in [2] an, um die Eigenwerte  $\nu_{01}, \nu_{02}$  zu bestimmen. Die analoge Gleichung lautet in unserem Fall

$$\left. \begin{aligned} - \left(1 - \frac{n}{x^2}\right) \Delta x - \frac{n}{x^3} \Delta x^2 \\ + \left\{ \frac{6n}{x^4} + \left(1 - \frac{n}{x^2}\right)^2 \frac{\Delta x^3}{6} \right\} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wobei  $n = \nu(\nu + 1)$ ,

$x = ka$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $a$  = Erdradius,  $\lambda$  = emittierte Wellenlänge,

$\Delta x = kH$ ;  $H$  = Höhe der Ionosphäre über dem Erdboden.

$n$  ergibt sich zu

$$\left. \begin{aligned} n = -3 \frac{1 - \delta(1 - \delta)}{\delta^2} \\ + x^2 \pm \left\{ \frac{9}{\delta^4} \left[ 1 + \delta^2(1 - \delta)^2 - 2\delta(1 - \delta) \right] \right. \\ \left. + 6x^2 \frac{1 - \delta}{\delta} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei  $\delta = \frac{\Delta x}{x} = \frac{H}{a}$ .

Aus  $n = \nu(\nu + 1)$  folgt

$$\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + n} \approx \sqrt{n}, \quad \text{wenn } n \gg 1.$$

Man erhält, wie es die WATSONsche Theorie verlangt, 2 reelle, positive  $\nu$ , wenn die emittierte Wellenlänge  $\lambda$  im Intervall

$$\lambda_1 = 37,8 \leq \lambda_{km} \leq 179,5 = \lambda_2$$

liegt.

Diese Werte ergeben sich als Grenzen, wenn man

$$H = 70 \text{ km},$$

$$a = \frac{2}{\pi} \cdot 10^4 \text{ km}$$

setzt und die Theorie der quadratischen Gleichungen beachtet.

\* Auszug aus der Dissertation an der Technischen Hochschule München.



Ein zweites  $\nu$  bedeutet Auftreten eines zweiten Gliedes in der Formel. Nimmt also die Wellenlänge von  $\lambda \rightarrow \infty$  an ab, so erscheint dieses zweite Glied erstmals bei  $\lambda_2 = 180$  km. Für größere Wellenlängen gilt daher die eingliedrige Formel von SCHUMANN.

Macht man  $\lambda$  weiter kleiner, so erhält man von  $\lambda_1 = 38$  km ab für die  $\nu 2$  konjugiert-komplexe Werte, was physikalisch sinnlos ist, da, wie wir alsbald zeigen werden,  $\nu$  im Exponenten auftritt und im Falle ideal leitender Ionosphäre ein rein reeller Wert im Exponenten der Feldstärke zu erwarten ist. Ein etwa auftretender Imaginärteil würde eine Dämpfung bedeuten, deren Existenz nicht einzusehen wäre.

Die Genauigkeit der Approximation wird etwa bis  $\lambda = \frac{\lambda_2}{2}$  garantiert. Unsere jetzigen Eigenwerte wollen wir mit  $\nu_{01}$  und  $\nu_{02}$  bezeichnen, während wir die ihnen entsprechenden komplexen Werte bei endlich gut leitender Ionosphäre  $\nu_1$  und  $\nu_2$  nennen wollen. Es sei

$$\nu_l = \nu_{0l} (1 + \varepsilon_l), \quad l = 1; 2.$$

$\varepsilon_l$  ist ein komplexer Korrektionsfaktor:  $|\varepsilon_l| \ll 1$ .

Mithin gilt näherungsweise:

$$n_l = \nu_l (\nu_l + 1) \approx n_{0l} (1 + 2 \varepsilon_l),$$

wo

$$n_{0l} = \nu_{0l} (\nu_{0l} + 1).$$

Statt der Gl. (1) hat man jetzt

$$-\left(1 - \frac{n}{x^2}\right) \Delta x - \frac{n}{x^3} \Delta x^2 + \gamma \left(\frac{\nu}{z} + j\right) = 0. \quad (3)$$

Hierbei bedeuten  $\gamma = \frac{k}{k'}$ ;  $k' = \sqrt{\omega \mu \kappa} e^{-j\pi/4}$  Wellenzahl der Ionosphäre.

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \text{Kreisfrequenz};$$

$$c = \text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum} \\ (= 3 \cdot 10^8 \text{ m sec}^{-1});$$

$$\left. \begin{aligned} j &= \sqrt{-1}; \mu = \text{Permeabilität} \\ \kappa &= \text{Leitfähigkeit} \end{aligned} \right\} \text{ der Ionosphäre};$$

$z = k' b$ ;  $b$  = Innenradius der Ionosphäre  $= a + H$ .

vgl. [2] Gl. (9) ff.

Man erhält  $\varepsilon_l$  unter Berücksichtigung von Gl. (3):

$$\left. \begin{aligned} -x \delta + \frac{\delta}{x} n_{0l} (1 + 2 \varepsilon_l) - \frac{\delta^2}{x} n_{0l} (1 + 2 \varepsilon_l) \\ + \frac{\gamma}{z} \nu_{0l} (1 + \varepsilon_l) + \gamma j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Wenn man außerdem (1) beachtet, dann findet man hieraus

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{-\gamma \left(\frac{\nu_{0l}}{z} + j\right)}{2 n_{0l} \frac{\delta - \delta^2}{x} + \frac{\gamma \nu_{0l}}{z}} \\ &= - \frac{e^{-j\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda c \mu \kappa}} \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{\nu_{0l} e^{j\pi/4}}{\sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda} \mu \kappa}} + j \right] a}{2 n_{0l} \frac{H}{a} \left(1 - \frac{H}{a}\right) + \frac{2\pi j}{\lambda c \mu \kappa} \frac{a \nu_{0l}}{a + H}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Es ist

$$\text{Re}(\nu_l) \gg \text{Im}(\nu_l) \quad \text{und} \quad \text{Re}(\nu_l) \approx \nu_{0l}.$$

Wenn  $\nu_l$  nicht in einem Exponenten auftritt, darf man setzen

$$\nu_l \approx \nu_{0l}, \quad \text{falls} \quad \lambda \neq \lambda_2.$$

Jetzt sind wir in der Lage, die HERTZsche Potentialfunktion  $II$  für die Erdoberfläche  $r = a$  zu bestimmen.

Sie stellt sich nach der WATSONschen Transformation dar als

$$II(a, \Theta) = -A \sum_{l=1;2} \frac{\pi(2\nu_l + 1)}{k a^2} \frac{P_{\nu_l}(-\cos \Theta)}{\sin \nu_l \pi} \frac{g}{h}. \quad (5)$$

Hierbei bedeutet:  $\Theta$  = Komplement der geographischen Breite.

$P_{\nu_l}$  = zonale Kugelfunktion;

$$A = \frac{300}{k^2} \sqrt{N_{\text{KW}}};$$

$N$  = Strahlungsleistung in den Vollraum.

Die Funktionen  $g$  und  $h$  sind wie folgt definiert:

$$g = \psi_\nu(x) \zeta'_\nu(y) - \psi'_\nu(y) \zeta_\nu(x) \quad (6)$$

mit

$$\psi_\nu(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2}} J_{\nu + \frac{1}{2}}(\varrho)$$

$$\zeta_\nu(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2}} H_{\nu + \frac{1}{2}}^{(2)}(\varrho)$$

$J$  = BESSELSche Funktion

$H$  = HANKELSche Funktion.

$$x = k a; \quad y = k b;$$

der Strich bedeutet Differentiation nach  $x$ .

$$h = \frac{\partial}{\partial y} \{ \psi'_\nu(x) \zeta'_\nu(y) - \psi'_\nu(y) \zeta'_\nu(x) \}_{y=\nu_l}. \quad (7)$$

Wenn man  $\psi_\nu(y)$  und  $\zeta_\nu(y)$ , sowie deren Ableitungen an der Stelle  $x$  nach TAYLOR entwickelt, wobei  $y = x + \Delta x$  gesetzt ist, und beachtet, daß beide Funktionen die Differentialgleichung erfüllen

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \left[ 1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} \right] \right\} f(x) = 0; \quad f(x) = \begin{pmatrix} \psi_\nu(x) \\ \zeta_\nu(x) \end{pmatrix},$$

dann erhält man für  $g$  und  $h$  die Ausdrücke

$$g = -j \left\{ 1 + \frac{\delta^2}{2} (n_l - x^2) - \frac{2}{3} n_l \delta^3 \pm \dots \right\} \quad (6a)$$

$$h = j (2 \nu_l + 1) \frac{\delta - \delta^2}{x} \quad (7a)$$

$l = 1$  bzw.  $2$ ;  $\delta = H/a$ ;  $x = k a$ ;  $n_l = \nu_l (\nu_l + 1)$ .

Außerdem ist

$$\psi'_\nu(x) \zeta_\nu(x) - \zeta'_\nu(x) \psi_\nu(x) = j \quad [3]$$

Ähnlich wurde auch Gl. (1) abgeleitet.

Aus  $II$  gewinnt man

$$E_r = -\frac{1}{r a} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial II}{\partial \Theta} \right)$$

siehe z. B. [4].

Berücksichtigt man die Differentialgleichung der Kugelfunktionen, dann erhält man für die Radialkomponente des elektrischen Feldes

$$E_r = \sum_{l=1;2} \frac{\nu_l (\nu_l + 1)}{a^2} II. \quad (8)$$

Für  $|\nu_l| \gg 1$  (was bei der Grenzwellenlänge  $\lambda_2$  für  $\nu_2$  nicht der Fall ist!) gilt nach [5] asymptotisch

$$P_{\nu_l}(-\cos \Theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu_l \sin \Theta}} \cos \left[ \left( \nu_l + \frac{1}{2} \right) (\pi - \Theta) - \frac{\pi}{4} \right].$$



Außerdem ist

$$Re(v_l) \gg Im(v_l).$$

Somit findet man mit Gl. (5) ff.

$$E_r = \frac{300 \sqrt{N} \sqrt{\pi}}{k^2} \sum_{i=1;2} \frac{n_l \left\{ 1 - \frac{k^2 H^2}{2} + n_l \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{H}{a} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{H}{a} \right)^3 \right] \right\}}{a^2 H - a H^2} \times \sqrt{\frac{2}{v_l \sin \Theta}} j \sqrt{j} e^{-j(v_l + \frac{1}{2})\Theta} = j \sqrt{j} \sum_{i=1;2} \chi_i e^{-j(v_l + \frac{1}{2})\Theta} \quad (9)$$

$\chi_i$  = „Intensität der Erzeugung“.

Ist statt der Strahlungsleistung  $N$  der mittlere effektive Antennenstrom  $J$  gegeben, dann ist die Beziehung zu beachten

$$N_H = \frac{1}{2} N = 160 \pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 J^2 \text{ Watt}$$

$N_H$  = Strahlung in den Halbraum;  $h$  = Höhe der Antenne.  $h$  ist in km auszudrücken, wenn  $N$  in kW gegeben ist. (Ebenso  $\lambda$  in km.)

Der Effektivwert der Feldstärke ist:

$$E_{r\text{eff}} = \frac{|E_r|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{E_r E_r^*}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1^2 e^{-2\beta_1 \Theta} + \chi_2^2 e^{-2\beta_2 \Theta} + 2 \chi_1 \chi_2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)\Theta} \cos(\Delta v' \Theta))^{1/2}, \quad (10)$$

wobei  $v_l + \frac{1}{2} = v'_l - j\beta_l$  gesetzt ist.  $\Delta v' = |v'_1 - v'_2|$ ;  $\beta_l > 0$ .

In Gl. (10) rührt das erste Glied der Klammer allein von der auftretenden „Grundwelle“ her, die sich auch bei der SCHUMANNschen Formel [2] findet. Das zweite Glied stammt allein von der nach unserer Methode neu auftretenden „Oberwelle“, während das dritte Glied die Interferenz beider wiedergibt.

In Tabelle 1 sind die Verhältnisse  $v_{01}/x$  und  $v_{02}/x$  bei verschiedenen  $\lambda$  dargestellt. Es wurde stets

$$H = 70 \text{ km}; \quad H/a = \delta = 0,011$$

angenommen.

Tabelle 1.

$\lambda_{\text{km}}$	$v_{01}/x$	$v_{02}/x$	$\alpha(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}}$
40	1,05	0,92	0,992
70	1,02	0,862	0,88
100	1,002	0,83	0,75
130	1,025	0,62	0,592
170	1,015	0,319	0,295

Gemäß dieser Tabelle kann  $v_{01}$  stets ohne Bedenken durch  $x = k a$  ersetzt werden.

Das Verhältnis  $v_{02}/x$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  kann man durch die Parabel

$$\alpha(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}} \quad (11)$$

annähern, vgl. Abb. 1.

Mithin hat man

$$\left. \begin{aligned} v_{01} &\approx \alpha_1 x = \alpha_1 \cdot \frac{2\pi a}{\lambda} \\ \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= \alpha(\lambda) \\ \alpha(\lambda), &\text{ siehe Gl. (11).} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wenn wir nun in stärkerer Näherung Gl. (3) anschreiben

$$-\left(1 - \frac{n}{x^2}\right) \Delta x + \gamma \left( \frac{v}{z} + j \right) = 0, \quad (13)$$

so folgt

$$1 - \frac{n}{x^2} = \frac{\gamma}{\Delta x} \left( \frac{v}{z} + j \right) = \frac{\gamma}{z \Delta x} (v + j z) \approx \frac{b}{H z} j;$$

denn  $|z| \gg |v|$

$$\gamma = \frac{k}{k'}; \quad z = k' b;$$

also ist:

$$n_l = n_{0l} (1 + 2 \epsilon_l) = x^2 \left( 1 - \frac{b}{H z} j \right),$$

daher:

$$\epsilon_l = \frac{x^2 \left( 1 - \frac{b}{H z} j \right) - n_{0l}}{2 n_{0l}} = \frac{1}{2 \alpha_l^2} \left\{ \frac{e^{-j\pi/4}}{H \sqrt{\omega \mu \kappa}} + 1 - \alpha_l^2 \right\} \quad (14)$$

gemäß (12) und mit der Bedeutung von  $z = k' b$ .

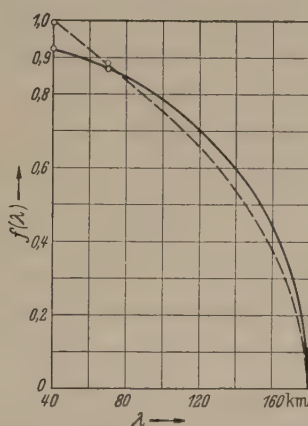


Abb. 1. Zur Methode der parabolischen Approximation.

Abzisse: Wellenlänge  $\lambda$  in km gemessen.

Ordinate: a) ausgezogene Kurve:

$$f(\lambda) = \frac{v_{02}}{x} = \frac{1}{k a} \left\{ -3 \left( \frac{a}{H} \right)^2 \left[ 1 + \frac{H}{a} \left( \frac{H}{a} - 1 \right) \right] + k^2 a^2 - \left\{ 9 \left( \frac{a}{H} \right)^4 \left[ 1 - \frac{H}{a} \left( 1 - \frac{H}{a} \right) \right]^2 + 6 \frac{k^2 a^3}{H} \left( 1 - \frac{H}{a} \right) \right\}^{1/2} \right\}$$

b) gestrichelte Kurve:

$$f(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \alpha(\lambda)$$

$a$  = Erdradius:  $2\pi \cdot 10^4$  km;  $H$  = Höhe der Ionosphäre über der Erde: 70 km.

$k$  = Wellenzahl in Luft:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$   
 $\lambda_1 = 40 \text{ km}, \quad \lambda_2 = 180 \text{ km}.$

Multiplikation mit  $v_{01}$  liefert unter Beachtung von (12)

$$\left. \begin{aligned} -\beta_l &= J m(v_{0l} \epsilon_l) = -\frac{a}{2 \alpha_l H} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda c \mu \kappa}} \\ &= -\frac{a}{2 \alpha_l H c} \sqrt{\frac{\omega}{2 \mu \kappa}} = -\frac{a}{\alpha_l} \frac{0,00206}{\sqrt{\lambda_{\text{km}}}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} H &= 70 \text{ km}; \quad a = \frac{2}{\pi} \cdot 10^4 \text{ km}; \quad \mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V sec}}{\text{A m}} \\ \kappa &= 10^{-4} \frac{\text{S}}{\text{m}}. \end{aligned} \right\}$$

Tab. 2 gibt uns nun mit obigen Zahlen einige Werte des Dämpfungsfaktors  $\beta_l$  bei variiertem  $\lambda$ .

Die Werte I wurden nach Gl. (15), die unter II nach Gl. (4) exakt berechnet. Die letzte Kolonne gibt zum Vergleich die Werte für  $\beta$  nach der SCHUMANNschen Formel aus [2].

\* bedeutet die konjugiert-komplexe Größe.



Tabelle 2.

$\lambda_{\text{km}}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta$
	I		II		
40	2,07	2,085	2,36	2,31	2,07
70	1,57	1,785	1,67	1,85	1,57
100	1,31	1,75	1,38	1,65	1,31
130	1,15	1,94	1,2	1,79	1,15
170	1,005	3,88	1,05	3,22	1,005

Bemerkenswert ist das Ansteigen von  $\beta_2$  in der Nähe der Grenzwellenlänge  $\lambda_2$ . Wir werden auf diese Tatsache noch zurückkommen. Die Werte von  $\beta$  nach der SCHUMANNschen Formel stimmen genau mit den unsrigen für  $\beta_1$  überein, wie dies Gl. (15) und (12) ja fordern.

Zieht man zur Berechnung der Intensität  $\chi_l$  der Erzeugung ebenfalls die „Parabelmethode“ nach Gl. (12) zu Rate und vernachlässigt im Nenner

$$a H^2 \text{ gegen } a^2 H,$$

so findet man bei gegebenem Antennenstrom

$$\chi_l = \frac{120 \pi}{H} J h \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \sqrt{\frac{1}{\lambda D}} \alpha_l^{3/2} \left[ 1 - \frac{1 - \alpha_l^2}{2} \left( \frac{2 \pi H}{\lambda} \right)^2 - \frac{2}{3} \alpha_l^2 \left( \frac{2 \pi a}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{H}{a} \right)^3 \right]. \quad (16)$$

$D = a \Theta$ : Entfernung des Beobachtungsortes  $\Theta$  vom Sender auf der Erdoberfläche.

$\beta_1$  und  $\chi_1$  gehen bei Anwendung der Parabelmethode (fast) genau in die von SCHUMANN in [2] gefundenen Formeln über.

Die Gl. (9) gibt uns das physikalische Bild eines Wellenzuges, der aus 2 Wellen (Indices 1 und 2) durch Superposition entstanden gedacht werden kann. Die alte, eingliedrige Formel von SCHUMANN können wir als „Grundwelle“ (Welle 0) interpretieren. Nach (12) unterscheidet sich Welle 1 bei uns so gut wie nicht von der Welle 0. Sie spielt also physikalisch die gleiche Rolle. Welle 2 bei unseren Formeln ist dagegen als eine Art „erster Oberschwingung“ anzusehen [6] und [7]. Sie korrigiert die Grundwelle insbesondere für kürzere Wellenlängen als 150 km. Unsere Formel gilt bis etwa 70 km Wellenlänge.

Die für kleinere  $\lambda$  auftretenden Disharmonien zwischen alter und neuer Formel beruhen auf Vernachlässigungen, die dort nicht mehr zulässig sind, weshalb das Näherungsverfahren zu verfeinern war.

Aus Gl. (15) erkennen wir, daß bei der SCHUMANNschen Formel („Welle 0“) ebenso wie bei unserer „Welle 1“  $\beta \rightarrow 0$  mit wachsendem  $\lambda \rightarrow \infty$  strebt.

$\beta_2$  dagegen besitzt etwa bei  $\lambda \approx 100$  km ein Minimum und geht für  $\lambda = \lambda_2$  gegen Unendlich. Dies bedeutet einen Übergang in die alte SCHUMANNsche Formel [2] von dieser Stelle ab.

Wie es sein muß, ist der Dämpfungsfaktor  $\beta_2$  der Oberwelle 2 stets größer als  $\beta_1$  für die Grundwelle, was in der Tat im ganzen Intervall  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  der Fall ist.

Tabelle 3 gibt uns eine Übersicht über die Größe der Intensität der Erzeugung.

Die erste Kolonne gibt die Werte nach SCHUMANN, unter I finden sich die aus Gl. (9) gefundenen Werte, während unter II die Werte stehen, die nach Gl. (16) berechnet wurden. Auch hier wurde stets  $H = 70$  km und  $a = 2/\pi \cdot 10\,000$  km gesetzt.

Tabelle 3.

$\lambda_{km}$	$10^3 \sqrt{\frac{\sin \Theta}{J h}} \chi$	$10^3 \sqrt{\frac{\sin \Theta}{J h}} \chi_1$	$10^3 \sqrt{\frac{\sin \Theta}{J h}} \chi_2$	$10^3 \sqrt{\frac{\sin \Theta}{J h}} \chi_1$	$10^3 \sqrt{\frac{\sin \Theta}{J h}} \chi_2$
	I			II	
40	7,9	82	—76	1,14	—89,9
70	7,15	15	—25,8	5,48	—24,4
100	6,2	6,98	—10,2	5,51	—14,3
130	5,52	7,25	—7,0	5,16	—8,7
170	4,92	4,25	—1,86	4,9	—1,63

Abb. 2 gibt die Werte der Tabelle 3 im logarithmischen Maßstab gegen  $\lambda$ .

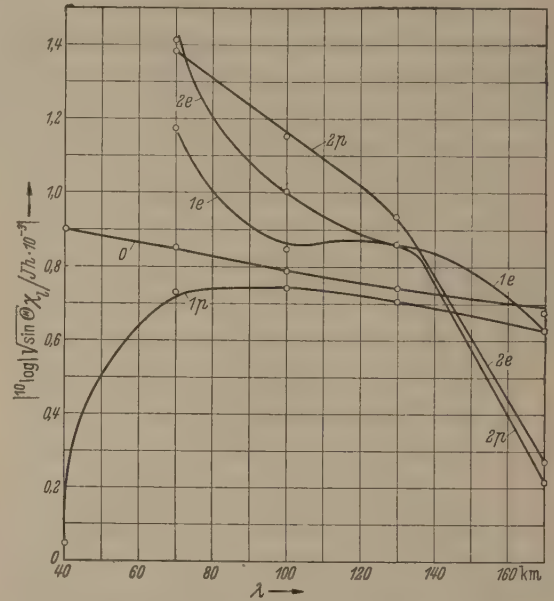


Abb. 2. Intensität der Erzeugung als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$ .

$\chi_l$  = Intensität der Erzeugung:

$$\chi_l = \frac{n_l \left\{ 1 - \frac{k^2 H^2}{2} + n_l \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{H}{a} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{H}{a} \right)^3 \right] \right\}}{a^2 H^2 - a H^2} \sqrt{\frac{2}{v_l \sin \Theta}} \cdot \frac{30 \lambda}{\sqrt{\pi}} J h$$
$$\approx \frac{120 \pi}{H} J h \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} \sqrt{\frac{1}{\lambda D}} \alpha_l^{3/2} \left[ 1 - \frac{1 - \alpha_l^2}{2} \left( \frac{2 \pi H}{\lambda} \right)^2 - \frac{2}{3} \alpha_l^2 \left( \frac{2 \pi a}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{H}{a} \right)^3 \right];$$
$$\alpha_1 = 1$$
$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

Vgl. Gl. (9) und Gl. (16)

$$k = \frac{2 \pi}{\lambda}; \quad H = \text{Höhe der Ionosphäre: } H = 70 \text{ km}$$

$$a = \text{Erdradius: } a = 2/\pi \cdot 10^4 \text{ km.}$$

$$\lambda_1 = 40 \text{ km; } \lambda_2 = 180 \text{ km: Grenzen des Intervalles, in dem die neue Formel gilt.}$$

$$0 = \text{für Welle 0 nach SCHUMANN,}$$

$$1e = \text{„ 1 „ Gl. (9)}$$

$$1p = \text{„ 1 „ Gl. (16)}$$

$$2e = \text{„ 2 „ Gl. (9)}$$

$$2p = \text{„ 2 „ Gl. (16)}$$

$$J = \text{Antennenstrom; } h = \text{Antennenhöhe.}$$

Die Phasengeschwindigkeit unserer Wellen bestimmt sich aus Gl. (9), aus der wir ersehen, daß die Welle  $l$  die Wellenzahl

$$K_l = \frac{v_l + \frac{1}{2}}{a} \approx \frac{v_0 l + \beta_l - \beta_l j}{a}$$

besitzt,

$$v_p^{(l)} = \frac{\omega}{|K_l|} = \frac{\omega a}{\alpha_l \left( k a + \frac{\beta_1}{\alpha_l^2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\beta_1}{\alpha_l^2 \left( k a + \frac{\beta_1}{\alpha_l^2} \right)} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (17)$$
$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$



Wir erkennen:  $v_p^{(1)} \approx c$ ;  $v_p^{(2)}$  wird  $\gg c$ , fällt aber wegen der Dämpfung  $\beta_1$  für  $\lambda \rightarrow \lambda_2$  fast plötzlich auf 0 herab. Einen qualitativen Verlauf von  $v_p^{(2)}$  gibt Abb. 3.

Für die effektive Feldstärke (vgl. Gl. (10)) existieren auch von anderen Autoren ähnliche Formeln. Mit ihnen wollen wir unsere Ergebnisse vergleichen:

$$E_{r\text{eff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right] = \frac{120\pi}{H} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} J h \sqrt{\frac{1}{\lambda D}} \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{H}{a} \right)^3 \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 \right] e^{-\frac{0,00206 D}{\sqrt{\lambda}}} \quad (18)$$

Formel von SCHUMANN [2]

$$E_{r\text{eff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right] = \frac{120\pi}{\lambda D} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} J h e^{-\frac{0,0014 D}{\lambda^{0,6}}} \quad (19)$$

Formel von AUSTIN [8] und [11]

$$E_{r\text{eff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right] = \frac{120\pi}{\lambda D} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} J h e^{-\frac{0,005 D}{\lambda^{1,25}}} \quad (20)$$

Formel von ESPENSCHIED [9]

$$E_{r\text{eff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right] = \frac{0,145 J h}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{\Theta}{\sin \Theta}} e^{-\frac{0,003 D}{\lambda}} \quad (21)$$

Formel von ZINKE [10].

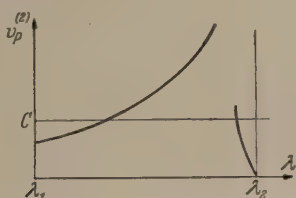


Abb. 3. Qualitativer Verlauf der Phasengeschwindigkeit der Welle 2 in Abhängigkeit von  $\lambda$ .

In Tabelle 4 sind für  $\lambda = 40$  km und  $\lambda = 130$  km Zahlenwerte der effektiven Feldstärke nach diesen Formeln zusammengestellt:

Tabelle 4.

$\Theta$	$D$ (km)	I	II	III	IV	V	$\frac{10^3 E_{\text{reff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right]}{Jh}$
$\pi/8$	2500	5,14	27,2	34,9	7,45	36,8	
$\pi/4$	5000	1,51	9,68	16,0	4,34	6,15	
$3\pi/8$	7500	0,5	4,6	10,0	3,08	6,15	
$\pi/2$	10000	0,178	2,67	7,46	2,21	2,86	
für $\lambda = 40$ km							
$\pi/8$	2500	7,36	10,1	11,8	2,78	13,4	$\frac{10^3 E_{\text{reff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right]}{Jh}$
$\pi/4$	5000	4,18	4,5	6,9	1,93	3,44	
$3\pi/8$	7500	1,82	2,51	4,04	1,59	1,815	
$\pi/2$	10000	1,1	1,74	3,36	1,44	1,34	
für $\lambda = 130$ km							

Hierbei bedeuten:

- I = SCHUMANN
- II = AUSTIN
- III = ESPENSCHIED
- IV = ZINKE
- V = neue Formel (nach Gl. (9)).

Abb. 4 illustriert diese Tabelle.

Nach der Formel von SCHUMANN (I) und der neuen Formel (V) wurden außerdem die effektiven Feldstärken für  $\lambda = 170$  km (Nähe der Obergrenze  $\lambda_2$ ) berechnet:

Tabelle 5.

$\Theta$	$D$ (km)	I	V	$10^3 E_{r\text{eff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right] / Jh$
$\pi/8$	2500	4,61	3,92	$10^3 E_{r\text{eff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right] / Jh$
$\pi/4$	5000	2,31	2,09	
$3\pi/8$	7500	1,385	1,365	
$\pi/2$	10000	0,0835	0,0835	

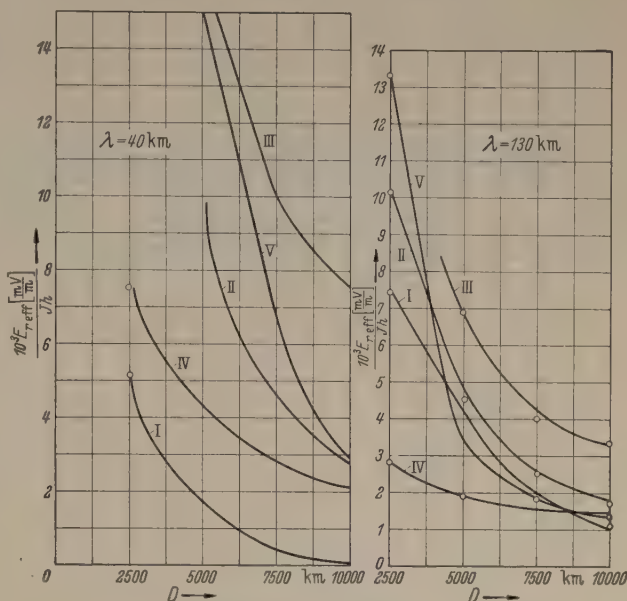


Abb. 4. Abhängigkeit der Feldstärke von der Entfernung.  
Abszisse: Entfernung  $D$  in km gemessen.

Ordinate: Effektive Feldstärke:  $10^3 E_{r\text{eff}} \left[ \frac{\text{mV}}{\text{m}} \right] / Jh$

$J$  = Antennenstrom,  $h$  = Antennenhöhe.

I nach SCHUMANN [2], III nach ESPENSCHIED [9],

II nach AUSTIN [8], IV nach ZINKE [10],

V neue Formel, nach Gl. (9) und (10).

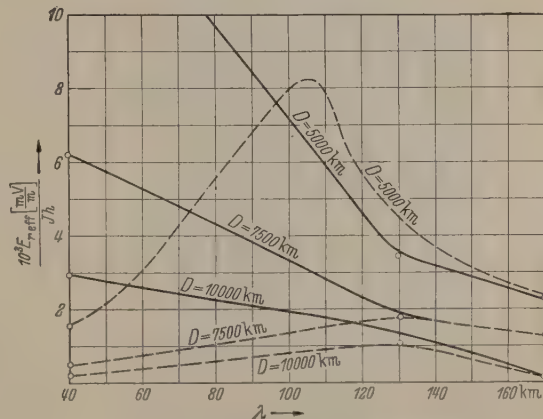


Abb. 5. Spektralverteilung der Feldstärke.

Abszisse: Wellenlänge  $\lambda$  in km gemessen.

Ordinate:  $10^3 E_{r\text{eff}} / Jh$  in mV/m

$J$  = effektiver mittlerer Antennenstrom in Ampere  
 $h$  = Höhe der Antenne in km.

Als Scharparameter ist die Entfernung  $D$  vom Sender gewählt. Die gestrichelten Kurven repräsentieren die Werte der Formel I nach SCHUMANN, die ausgezogenen jene der neuen Formel V.

Durch die letzte Tabelle wird das Verschwinden der Welle 2 für  $\lambda \rightarrow \lambda_2$  verifiziert, was einen Übergang in die SCHUMANNsche Formel mit ihren Werten I bedeutet.

#### Zusammenfassung.

Auf Grund der Formeln von WATSON und SCHUMANN wird eine neue Formel zur Berechnung der Ausbreitung von Dipolschwingungen sehr großer Wellenlänge rund um die Erde abgeleitet. Während die SCHUMANNsche Formel einen Wellenzug liefert (z. B.



für die radiale Feldstärke), erhalten wir hier deren zwei, welche einer Grundwelle und einer Oberwelle entsprechen. Die Grundwelle ist fast die gleiche wie in der SCHUMANNschen Arbeit, die Oberwelle jedoch korrigiert diese Formel insbesondere für kleinere Wellenlängen. Die neue Formel gilt nur in einem Intervall von etwa  $\lambda = 40$  km bis  $\lambda = 180$  km. Für  $\lambda < 40$  km versagt sie völlig, während sie für  $\lambda > 180$  km in die alte SCHUMANNsche Formel übergeht, was durch die unendlich starke Dämpfung der Welle 2 hervorgerufen wird, wenn  $\lambda \rightarrow 180$  km geht. Wegen dieser Dämpfung steigt die Phasengeschwindigkeit der Welle 2 am Ende des Intervalles sehr stark an — sie wird weit größer als Lichtgeschwindigkeit —, um aber dann fast unmittelbar auf 0 herabzusinken.

An dieser Stelle darf ich Herrn Professor Dr. W. O. SCHUMANN für die Anregung und Unterstützung dieser Dissertation meinen ergebensten Dank aussprechen!

**Literatur.** [1] WATSON, G. N.: Proc. Roy. Soc. A 95, 546 (1919). — [2] SCHUMANN, W. O.: Z. angew. Phys. 4, 474 (1952). — [3] MAGNUS-OBERHETTINGER, Formeln und Sätze, Springer 1948, S. 32. — [4] SOMMERFELD, A.: Partielle Differentialgleichungen, Wiesbaden 1947, S. 283. — [5] MAGNUS-OBERHETTINGER, S. 92. — [6] SCHUMANN, W. O.: Naturw. 40, 504 (1953). — [7] SCHUMANN, W. O.: Z. angew. Phys. 6, 35 (1954). — [8] AUSTIN, L. W.: Proc. Inst. Rad. Eng. 20, 689 (1932). — [9] ESPENSCHIED, ANDERSON und BAILEY: Proc. Inst. Rad. Eng. 14, 7 (1926). — [10] ZINKE, O.: Frequenz 1, 16 (1947). — [11] AUSTIN, L. W.: Washington Bureau of Standards Bulletin, Oct. 1911.

Dr. JULIUS WEIDNER.  
Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule  
München.

## Demonstrationen zum zähelastischen Verhalten hochpolymerer Stoffe\*.

Von THEODOR GAST.

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 17. Juli 1954.)

Es werden einzelne Schauversuche beschrieben, die geeignet sein dürften, das mechanische Verhalten hochpolymerer Verbindungen so zu beleuchten, daß der besondere Charakter dieser Stoffgruppe [1] deutlich zutage tritt und die seiner Beschreibung dienenden Modelle und mathematischen Funktionen anschaulich werden.



Abb. 1. Längsdehnung und Querkontraktion bei einem Kunststoffband.

Wir gehen vom *Zugversuch* aus. Es ist wohlbekannt, daß ein Streifen aus beliebigem isotropem Material, den man durch Zugkräfte in der einen Richtung dehnt, sich quer dazu kontrahiert. Man sieht dies besonders deutlich bei einem Band aus schwarzem, hochelastischem Material (z. B. rußgefülltem Kautschuk), auf das man mit weißer Tusche einen Kreis gezeichnet hat. Dieser verformt sich bei Dehnung zur Ellipse. Um nun aber Dehnung und Querkontraktion

besser abschätzen zu können, wurde ein Bezugskreis angebracht, dessen Mittelpunkt stets mit dem Mittelpunkt der Figur auf dem elastischen Band zusammenfällt. Dieser Bezugskreis ist — ebenfalls mit weißer Tusche — auf eine Astralonscheibe gezeichnet. Durch einen Reißnagel, der beide Kreismittelpunkte durchbohrt, wird die richtige Lage der Schablone fixiert. Abb. 1 zeigt untereinander die Aufnahmen dieser Anordnung im entspannten und im gedehnten Zustand.

Zwischen Spannung  $\sigma$  und Dehnung  $\varepsilon$  vermittelt das HOOKEsche Gesetz  $\sigma_x = \varepsilon_x E$ ,  $E$  = Elastizitätsmodul und zwischen Dehnung und Querkontraktion die POISSONSche Zahl  $\mu$ .  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x$ .

Diese Konstante liegt bei den uns geläufigen Werkstoffen zwischen 0,2 und 0,5. Ist die POISSONSche Zahl gleich 0,5, so verringert sich der Querschnitt im gleichen Maß, wie die Länge wächst. Also bleibt das Volumen im Zug- und Druckversuch konstant. Dies ist bei den hochelastischen Stoffen der Fall, zu denen Naturprodukte wie Kautschuk und Guttapercha sowie manche lebenden Gewebe und viele Kunststoffe gehören. Hier ist die Kompressibilität im Verhältnis zur einseitigen Verformbarkeit durch Zug, Druck oder Schub sehr klein. In diesem Fall besteht zwischen dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Schubmodul  $G$  die einfache Beziehung

$$E = 3G.$$

Ein Vergleich der  $E$ -Moduln verschiedener Stoffe zeigt den weiten Spielraum elastischer Eigenschaften.

Stahl	etwa $2 \cdot 10^6$ kp/cm <sup>2</sup>
Holz / Faser	etwa $0,1 \cdot 10^6$ kp/cm <sup>2</sup>
Kautschuk	etwa $10^5$ — $5 \cdot 10^6$ kp/cm <sup>2</sup> .

Sehr viel kleinere Elastizitätsmoduln lassen sich durch den Einbau von Gasräumen in das elastische Material verwirklichen.

*Einflüsse von Zeit und Temperatur auf den Deformationsvorgang.*

Ideal elastische Vorgänge verlaufen unverzüglich, wenn nicht zur Auslenkung träge Massen beschleunigt werden müssen. Bei den Metallen und den kristal-

\* Vortrag auf der Physikertagung am 2. 5. 54 in Stuttgart.



linen nichtmetallischen Werkstoffen sind die auftretenden Verzögerungen im allgemeinen nicht augenfällig. Zu ihrer Feststellung bedarf es verfeinerter Meßmittel. Recht merklich ist aber — besonders in großen Bereichen — die Temperaturabhängigkeit des  $E$ -Moduls.

Untersucht man die Verformungen, die unter gegebener äußerer Beanspruchung bei hochpolymeren Stoffen eintreten, dann stellt man sehr oft fest, daß sie von Zeit und Temperatur stark abhängig sind. So ist ein Band aus einem bestimmten Kunststoff (z. B. aus Polyvinylchlorid mit wenig Weichmacher) bei Raumtemperatur durch Zug von Hand kaum dehnbar, nach Eintauchen in kochendes Wasser läßt es sich recht weit ausziehen und kehrt bei Entspannen in die Ausgangslänge zurück. Es ist wesentlich elastischer geworden. Schrecken wir es aber im gedehnten Zustand auf Raumtemperatur ab und entlasten es dann, so hat es merklich an Länge zugenommen.

Wir spannen nun die Folie im gereckten Zustand zwischen ein festes Widerlager und ein elastisches Glied, z. B. eine ziemlich starre Blattfeder ein. Auslenkungen der Feder können mit Hilfe einer großen Meßuhr deutlich sichtbar gemacht werden. Diese zeigt somit die auf die Einspannung ausgeübte Kraft an. Erwärmen wir nun die Probe, so entsteht — gewissermaßen aus dem Material heraus — wieder eine Spannung und zwar rund die gleiche, mit der die Probe vor dem Abschrecken gedehnt gehalten wurde. Kühlen wir nun wieder ab, so ändert sich die angezeigte Spannung nicht wesentlich. Nur genügt jetzt eine kleine Verschiebung der Einspannung, um die Probe äußerlich zu entlasten. D. h. im kalten Zustand ist der  $E$ -Modul relativ hoch. Erneutes Erwärmen bringt noch einmal nahezu die ursprüngliche Spannung hervor und das Spiel läßt sich öfters wiederholen. Offenbar bewirkt eine kleine Längenänderung im warmen Zustand nur ein unbedeutendes Nachlassen der Spannung, d. h. der  $E$ -Modul ist im erwärmten Zustand wesentlich kleiner als bei Raumtemperatur. Erhitzen wir die Probe zu stark, dann klingt der Spannungszustand ab. Das Material fließt. Das gleiche geschieht bei zu hoher Belastung im kalten Zustand. Dies läßt sich sehr schön auch an einem Band aus Polyäthylen zeigen, das sich bei Überlastung dehnt und dabei stark einschnürt (Abb. 2).

Erhitzen wir unsere im Dehnungszustand abgeschreckte Probe, ohne sie einzuspannen, dann zieht sie sich rasch auf die Ausgangslänge zusammen.

*Ein einfaches mechanisches Modell zur Darstellung des Verhaltens einer hochpolymeren Probe.*

Modelle sind jederzeit nur Denkhilfen und ihre Anwendung stellt ein Durchgangsstadium dar. Einstweilen ist es aber reizvoll und recht nützlich, das zähelastische Verhalten von Hochpolymeren durch Systeme von Federn und Dämpfern zu reproduzieren und elektrische Analogien aufzufinden.

Das Modell für unsere Probe im Zugversuch besteht aus einer relativ starren, rein elastischen Feder, welche die Elastizität im kalten Zustand wiedergeben soll. Sie ist der Einfachheit halber unmittelbar mit dem Modul  $E_1$  bezeichnet. An sie ist eine zweite, wesentlich weichere Feder angehängt, die das stark veränderte Verhalten im erwärmten Zustand wiedergibt, das wir „Hochelastizität“ nennen wollen.

Schließlich ist noch ein Dämpfer angebracht, dessen zähflüssige Füllung ein Bewegungsgesetz  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\delta}{\eta}$  gewährleisten soll. Hierin hat  $\eta$  den Charakter eines Dämpfungskoeffizienten. Als Stoffkonstante bedeutet es die innere Reibung oder Zähigkeit. Dieser Dämpfer, kurz durch  $\eta_3$  gekennzeichnet, soll den Fließvorgang reproduzieren. Nun fehlt noch ein mit  $\eta_2$  bezeichneter Dämpfer parallel zur zweiten Feder, während wir auf ein Dämpfungselement parallel zu Feder 1 im allgemeinen verzichten dürfen. Im kalten Zustand sind die

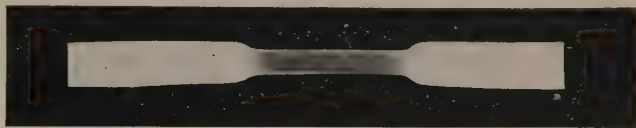


Abb. 2. Fließen und Einschnürung bei Polyäthylen.

Zähigkeiten  $\eta_2$  und  $\eta_3$  sehr groß. Spannt man das System, dann wird praktisch nur die starre Feder 1 ausgelenkt. Der  $E$ -Modul ist hoch. Beim Erwärmen „taut“ jetzt Dämpfer 2 „auf“. Nun kann der hochelastische Mechanismus, das sog. „VOIGT-Element“, gespannt werden. Der Elastizitätsmodul ist jetzt sehr viel kleiner als im Ausgangszustand. Schließlich erreicht die Temperatur einen Wert, bei dem die Zähigkeit soweit abgenommen hat, daß der Dämpfer merklich nachgibt. Kühlt man im gestreckten Zustand ab, dann wird zunächst der Dämpfer  $\eta_3$  blockiert. Dann friert der zur Feder 2 liegende Dämpfer  $\eta_2$  ein und sperrt die Rückfederung des hochelastischen Mechanis-

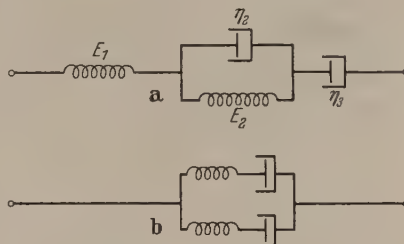


Abb. 3. Mechanische Modelle eines zäh-elastischen Stoffes.  
a) Reine Elastizität [Feder] mit verzögertem hochelastischem Verhalten [VOIGT-Element] verbunden mit Fließvermögen [Dämpfer];  
b) Mathematisch äquivalentes Modell aus zwei MAXWELL-Elementen.

mus. Nur Feder 1 bleibt im wesentlichen unbeeinflusst, wenn auch der sie kennzeichnende Modul  $E_1$  ein wenig von der Temperatur abhängt. Befreit man die Probe im kalten Zustand aus ihrer Einspannung, so entspannt sich zunächst Feder 1. Erwärmt man, dann taut Dämpfer 2 erneut auf und der hochelastische Mechanismus entspannt sich. Somit kehrt das gesamte System bis auf die verbleibende Auslenkung des Dämpfers wieder in die Ausgangslage zurück. Hält man die Anordnung nach dem Einfrieren im gestreckten Zustand und erwärmt, dann wird in dem Augenblick, in dem der Dämpfer  $\eta_2$  nachgiebig wird, eine Spannung bemerkbar, die sich auch auf Feder 1 auswirkt. Kühlt man wieder ab, dann wird der Dämpfer 2 erneut festgelegt. Feder 1 bleibt gespannt. Ein kleines Nachstellen des Widerlagers läßt die Spannung verschwinden. Neues Erwärmen setzt Mechanismus 2 frei. Die Spannung kehrt wieder. So läßt sich die im hochelastischen Mechanismus gespeicherte Energie schrittweise an den niederelastischen Mechanismus übergeben und freisetzen.



*Molekulare Ausdeutung und Abwandlung des Modells.*

Nachdem wir ein qualitatives und nur in begrenztem Bereich brauchbares Modell für das mechanische Verhalten von Kunststoffen entwickelt haben, fragen wir jetzt nach den inneren Ursachen für die unverzügerte Elastizität im kalten Zustand, die durch einen Dämpfungsmechanismus modifizierte Hochelastizität und das Fließen. Folgende Deutung ist gebräuchlich: Feder 1 entspricht den Verformungsmög-

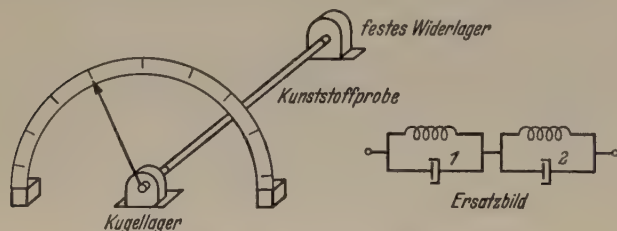


Abb. 4. Schenkelhebversuch zum Erinnerungsvermögen.

lichkeiten durch Verbiegen und Dehnen von Hauptvalenzbindungen. Die zweite, Feder bzw. die hochelastische Verformung kommt durch Entknäueln der für gewöhnlich statistisch geknäuelten Makromoleküle zustande. Zur Einstellung des Gleichgewichtszustandes ist bei diesem Vorgang erheblich mehr Zeit erforderlich, als beim ersten. Verformung und Rückfederung folgen Exponentialgesetzen mit Zeitkonstanten  $\tau_i = \eta_i/E_i$ , wobei  $\eta_i$  eine für den Mechanismus gültige Viskosität,  $E_i$  den für ihn geltenden Modul bedeuten.  $\tau_i$  wird *Retardationszeit* genannt. Diesem System ist in mathematischer Beziehung ein zweites gleichwertig, das aus zwei parallel liegenden Serienschaltungen von Feder und Dämpfer, sog. „MAXWELL-

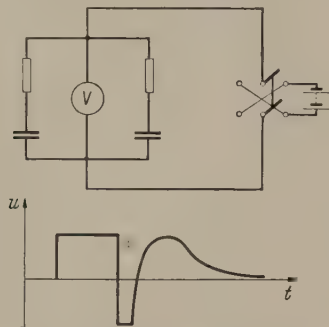


Abb. 5. Schaltung und Spannungsverlauf für das elektrische Analogon zum mechanischen Gedächtnis.

Elementen“, besteht. Jede Serienschaltung hat ihre eigene *Relaxationszeit*, welche die Zeitkonstante für das Abklingen von Spannungen darstellt. (Siehe Abb. 3 unten.) Praktisch reicht jedoch ein System mit nur zwei Relaxationszeiten nicht aus, um das Verhalten eines hochmolekularen Stoffes zu beschreiben. Man muß vielmehr annehmen, daß sich die Gesamtverformung auf eine Vielzahl von VOIGT-Mechanismen verteilt, bzw. die Gesamtspannung von einer großen Anzahl von MAXWELL-Elementen aufgenommen wird. Jeder Mechanismus hat seine eigene Retardationszeit bzw. Relaxationszeit. Man sagt, daß ein Spektrum von Relaxations- oder Retardationszeiten vorliegt. Das durch den Dämpfer  $\eta_3$  dargestellte Fließen erklärt man sich durch Aneinandervorbeigleiten von Makromolekülen, deren Querverbindungen durch stärkere Temperaturbewegung aufgelöst sind oder übergroßer Belastung nicht standhalten.

*Mechanisches Gedächtnis und zugehöriges elektrisches Analogon.*

Es ist aus der Verarbeitung und Anwendung von Kunststoffen bekannt, daß diese ein Erinnerungsvermögen an frühere Verformungszustände besitzen, das bei Erwärmung oder auch schon im kalten Zustand in erwünschter oder noch öfter unliebsamer Weise in Erscheinung tritt. Um ein solches Verhalten zu erklären, genügt bereits ein Modell mit nur zwei Retardationszeiten, die indessen möglichst weit auseinander liegen sollen.

Zur Darstellung eignet sich besonders gut der Torsionsversuch [3]. Man spannt einen Schlauch oder Rundriemen aus zähem Kunststoff, z. B. aus weichgestelltem PVC zwischen ein Widerlager und eine möglichst reibungsarm gelagerte Welle ein, die einen Zeiger trägt. Dieser spielt vor einer Kreisbogenskala. Man lenkt zunächst um  $180^\circ$  nach der einen Seite aus und hält die Welle in diesem Zustand etwa zwei Minuten fest. Dann dreht man rasch nach der Gegenseite um  $360^\circ$  und läßt sogleich die Welle frei. Der Zeiger kehrt rasch in die Nullstellung zurück, wandert weiter in die ursprüngliche Drehrichtung hinein und kehrt von einem Maximum aus sehr langsam wieder auf null zurück. Wir verstehen das Verhalten sofort bei Betrachtung des Ersatzschaltbildes. Beim Verharren in der ersten Auslenkung werden sowohl der Mechanismus 1 mit kurzer Retardationszeit als auch das Element 2 mit langsamer Einstellung weitgehend gespannt. Kehrt man die Auslenkung um, dann übernimmt Mechanismus 1 praktisch die gesamte Formänderung, da Mechanismus 2 nicht rasch genug nachkommen kann. Läßt man nun die Welle frei, dann entspannt sich das erste Element rasch, während im zweiten noch immer die ursprüngliche Verformung besteht, die nur sehr langsam abklingt. So „erinnert“ sich das Material an frühere Verformungszustände, und zwar um so deutlicher, je länger diese bestanden haben. Diese Erscheinung läßt sich mit Hilfe des BOLTZMANNschen Superpositionsgesetzes mathematisch formulieren. Sie besitzt indessen auch eine elektrische Entsprechung. Wir sehen dies aus folgendem Versuch (Abb. 5).

Wir verwenden als elektrisches Modell zwei Reihenschaltungen aus Kondensatoren und Widerständen mit sehr verschiedenen Zeitkonstanten, die z. B. 2 sec und 100 sec betragen. Die beiden Ketten werden parallel geschaltet und die anliegende Spannung wird mit einem Voltmeter, dessen Nullpunkt in Skalenmitte liegt, beobachtet. Das System sei mit einer Spannungsquelle von einigen Volt verbunden. Nach zwei Minuten polen wir die Spannungsquelle um, lassen den neuen Zustand kurz bestehen und trennen dann die Verbindung ab. Der Ausschlag des Voltmeters verläuft nunmehr nach der unten gezeichneten Kurve ganz entsprechend wie der Zeigerausschlag im mechanischen Versuch. In unserem elektrischen Modell entspricht die Spannung der mechanischen Auslenkung, die Kondensatoren entsprechen den Federn des mechanischen Modells und die Widerstände den Dämpfern. Um den Vergleich zu vervollständigen, muß die Rolle der mechanischen Spannung von der Ladung übernommen werden. Bei den bisher betrachteten Vorgängen dürfen wir wegen der relativ langen Versuchszeiten und geringen Beschleunigungen die Massenkräfte vernachlässigen. Dies ist bei rasch



verlaufenden Vorgängen nur dann erlaubt, wenn man dafür sorgt, daß mögliche Eigenschwingungen der Probe und ihrer Prüfvorrichtungen sehr viel höhere Frequenzen besitzen, als die Komponenten einer FOURIERzerlegung des Verformungsvorgangs.

*Mechanische und elektrische Hysteresisschleife.*

Die zunächst äußerliche Analogie zwischen mechanischen und elektrischen Ausgleichsvorgängen gewinnt physikalischen Gehalt beim Vergleich der mechanischen und elektrischen Hysteresisschleife. Diese Gegenüberstellung kann wirkungsvoll an ein und derselben Probe geschehen, wenn man im Torsionsversuch mit den folgenden Hilfsmitteln arbeitet. Die Probe wird zwischen ein möglichst starres oder mit großem Trägheitsmoment behaftetes Widerlager und einen kleinen quermagnetisierten Ferritzylinder eingespannt. Der Magnet kann durch ein Wechselfeld zu Torsionsschwingungen angeregt werden. Das Drehmoment, welches auf den Magneten ausgeübt wird, ist in jedem Augenblick dem Erregerstrom proportional. Führt man diesen über einen konstanten Widerstand zu, so entsteht hier ein dem Drehmoment proportionaler Spannungsabfall, den wir dazu benutzen, den Elektronenstrahl eines BRAUNschen Rohres horizontal ausulenken. So ist die  $x$ -Kordinate in Einheiten des Drehmomentes eichbar, wenn wir die Massenkräfte des Magneten zunächst vernachlässigen. Den Torsionswinkel können wir folgendermaßen auf die senkrechte Ablenkung des BRAUNschen Rohres übertragen: Am Magneten ist eine kleine Spule befestigt, die je nach ihrer Orientierung im Feld einer festen, mit Hochfrequenz gespeisten zweiten Spule ein mehr oder weniger großes Hochfrequenzsignal empfängt. Dieses wird gleichgerichtet und über einen Verstärker der senkrechten Ablenkung des BRAUNschen Rohres zugeführt. Man stellt die Drehspule von vornherein schräg zur HF-Feldspule, um eindeutige Winkelübertragung zu gewährleisten, oder wendet phasenabhängige Gleichrichtung an. Nun kann die  $y$ -Achse in Einheiten des Torsionswinkels beziffert werden. Bei periodischer Erregung beschreibt der Leuchtfleck eine Drehmoments- bzw. Schubspannungs-Torsionsschleife, welche der Spannungs-Dehnungsschleife des Zugversuchs entspricht. Wir stellen fest, daß diese die Form einer Ellipse hat. Lage und Achsenverhältnis lassen sich theoretisch vorhersagen, wenn die Frequenz der sinusförmigen Anregung gegeben und das Relaxationsspektrum bekannt ist. Die Neigung  $\text{tg } \alpha$  der Achsen der Ellipse gegen das Koordinatenkreuz entspricht der Nachgiebigkeit  $1/G$  der Probe, der Flächeninhalt ist ein Maß für die im Zyklus geleistete Arbeit.

Mit steigender Frequenz gewinnen das Trägheitsmoment des Magneten und der an ihm befestigten Teile an Einfluß. Der hierdurch verursachte Fehler läßt sich ausgleichen, wenn man von der Spannung an der waagerechten Ablenkung des Oszillographen in jedem Augenblick einen Betrag subtrahiert, der dem aus Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment resultierenden negativen Drehmoment entspricht. Diese Korrektur läßt sich schaltungstechnisch ohne besondere Schwierigkeiten verwirklichen.

Erwärmt man die Probe, dann werden mehr und mehr eingefrorene elastische Mechanismen frei, die Torsion bei gegebenem Drehmoment wächst und

die Schub-Torsionsfigur richtet sich auf. Gleichzeitig vergrößert sich der Flächeninhalt, weil die durch zähe Reibung umgesetzte Arbeit größer wird. Bei Abkühlung zieht sich die Ellipse wieder zusammen und dreht sich in die Ausgangslage zurück. Für den Schauversuch wurde ein Material gesucht, bei dem in bequem zugänglichem Temperaturbereich deutliche Veränderungen eintreten (Astralon). Dieses enthält Dipole, die seitlich an den Kettengliedern der Makromoleküle

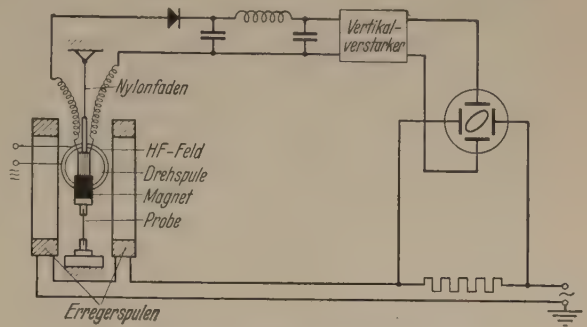


Abb. 6. Aufzeichnung der Drehmoment-Torsionskurve mit BRAUNschem Rohr.

sitzen. Bei Erwärmung nimmt die Beweglichkeit dieser Gruppen zu und man darf vermuten, daß sich die Dielektrizitätskonstante in ähnlicher Weise ändert wie die mechanische Nachgiebigkeit [4]. Jedenfalls wäre es wünschenswert, mit dem mechanischen Versuch gleichzeitig eine dielektrische Beobachtung zu verbinden. Dies kann auf folgende Weise geschehen: Man versieht die eingespannte Kunststoffprobe mit zwei sehr dünnen, am besten aufgedampften Metallbelegungen, die den mechanischen Vorgang nicht stören. Obere und untere Einspannungen dienen als Stromzuführungen an den so gebildeten Kondensator,

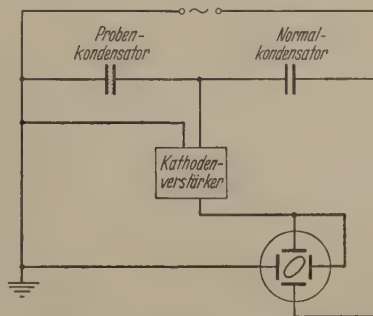


Abb. 7. Schaltung zur Aufzeichnung der Elektrisierungsschleife mit dem BRAUNschen Rohr.

der die Probe als Dielektrikum enthält und die Kapazität  $C_x$  besitzen soll. Man legt  $C_x$  mit einer Normalkapazität  $C_N$  in Reihe an eine Wechselstromquelle an. Weiter wird die an  $C_x$  abfallende Teilspannung zur horizontalen, die an  $C_N$  liegende Restspannung zur senkrechten Auslenkung eines Elektronenstrahls im Kathodenstrahloszillographen benützt. Durch einen Folgeverstärker erreicht man, daß das Potential am Verbindungspunkt der Kondensatoren ohne störende Belastung des Kondensatoren-Stromkreises auf den Verbindungspunkt der Plattenpaare übertragen wird. Daher gilt in jedem Augenblick für die auf  $C_x$  und  $C_N$  befindlichen Ladungen

$$Q_x = Q_N = Q.$$



Bedeutet  $F$  die Probenfläche,  $D_x$  die Verschiebungsdichte im Kondensator  $C_x$ ,  $u_x$  und  $u_n$  die Teilspannungen an  $C_x$  und  $C_N$ , so gilt  $u_n = C_N \cdot F \cdot D_x$ , und da wir  $u_x$  auf die waagerechte,  $u_n$  auf die senkrechte Ablenkung wirken lassen, erscheint als Schirmbild  $D_x = f(E_x)$ , wobei  $E_x$  die Feldstärke im Probenkondensator ist. Diese Figur ist im allgemeinen eine Ellipse, deren große Halbachsen gegen das Koordinatenkreuz um einen Winkel  $\alpha$  geneigt sind, für den  $\tan \alpha = B \cdot \varepsilon$  gilt, wenn  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante der Probe und  $B$  eine Konstante bedeuten. Der Inhalt der Ellipse entspricht der im Zyklus geleisteten Arbeit, mithin ist das Achsenverhältnis ein Maß für den Verlustfaktor.

Erwärmt man die Probe, dann dreht sich die Schleife und bläht sich gleichzeitig auf. Mit zunehmender Temperatur erhöht sich die Beweglichkeit der Dipole und damit wächst die Polarisierbarkeit an. Gleichzeitig nimmt aber auch der Betrag der durch zähe Reibung verbrauchten Energie zu. Außerdem wird — besonders bei niedrigen Frequenzen — ein zusätzlicher Verlustfaktor durch Leitungsströme bemerkbar. Diese stehen in einer gewissen Analogie zum mechanischen Fließvorgang, bei dem ebenfalls eine Diffusion in einer Vorzugsrichtung erfolgt, wenn auch die Größe der diffundierenden Teilchen, hier Ionen, dort Makromoleküle recht verschieden ist. Die Anordnung ist außer zu Demonstrationsversuchen bei sorgfältiger Wahl der Schaltelemente in einem verhältnismäßig weiten Frequenzbereich grundsätzlich auch zu quantitativen Bestimmungen brauchbar.

Den aufgeführten Versuchen liegen einfache Modellvorstellungen zugrunde, deren mathematische Auswertung sich in begrenzten Bereichen der eingehenden Parameter praktisch bewährt hat. In den letzten Jahren sind die Vorstellungen über den molekularen Hintergrund der mechanischen und thermischen Eigenschaften verfeinert worden. So genügen zur mathematischen Darstellung von Elastizität und Fließen vielfach nicht mehr lineare Beziehungen, sondern man muß Potenzreihen zu Hilfe nehmen, um theoretischen Voraussagen und experimentellen Befunden gerecht zu werden. Die behandelten Schauversuche sind nur zur ersten Einführung gedacht, und man darf allenfalls hoffen, daß sie die Grundlagen für verfeinerte Vorstellungen durch Anschaulichkeit festigen helfen.

#### Zusammenfassung.

Unter Anwendung einfacher mechanischer und elektrischer Modelle werden Schauversuche zum Einfluß von Zeit und Temperatur auf den Deformationsvorgang hochpolymerer Stoffe sowie zur Analogie zwischen mechanischem und elektrischem Verhalten beschrieben.

**Literatur.** [1] MÜLLER, F. H.: Kolloid-Zeitschrift 123, 65 (1951). — [2] TURNER, A.: Mechanical Behavior of High Polymers, Interscience New York 1948. — [3] DISS. H. FRICKE, Göttingen 1902<sup>1</sup>. — [4] WOLF, K.: Kunststoffe 41, 2 (1951).

Prof. Dr.-Ing. THEODOR GAST,  
Institut für technische Physik der T. H. Darmstadt.

<sup>1</sup> Für den Hinweis auf [3] danke ich Herrn Dipl. Phys. H. A. FLOCKE.

## Über die Meßgenauigkeit von Teilstrahlungs-pyrometern in der Mired-Skala.

Von JOACHIM EULER.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 3. Juni 1954.)

A. Vor etwa 30 Jahren hat PRIEST [1] die nach ihm benannte Regel aufgestellt, wonach man bei Farbpyrometern eine Meßgenauigkeit erzielen kann, die durch einen konstanten Fehler der reziproken Temperatur  $\Delta(1/T)$  von rund  $0,5$  bis  $1,0 \cdot 10^{-6} (1/^\circ\text{K})$  festgelegt ist. In den folgenden Jahren ist von PRIEST [2], H. P. GAGE [3], R. S. ESTEY [4] und K. S. WEAVER [5] darauf hingewiesen worden, daß für die Pyrometrie ganz allgemein die reziproke  $1/T$ -Skala wesentlich bequemer ist, als die normale, lineare  $T$ -Skala. Die Vorteile rühren daher, daß in der PLANCKSchen Strahlungsformel  $1/T$  im Exponenten vorkommt.

Tatsächlich wird durch das notwendige Bilden der reziproken Werte das numerische Rechnen mit  $T$  sehr erschwert. Dagegen schreiben sich mit den Reziprokwerten  $R = 1/T$  die meisten Formeln wesentlich einfacher.

So erhält man für die reziproke Farbtemperatur  $R_F$ , die aus zwei schwarzen Temperaturen  $S_1$  und  $S_2$  bzw. den Reziprokwerten  $R_{S1} = \frac{1}{S_1}$  und  $R_{S2} = \frac{1}{S_2}$  berechnet werden soll,

$$R_F = \frac{\nu_1 R_{S1} - \nu_2 R_{S2}}{\nu_1 - \nu_2},$$

worin  $\nu_1 = \frac{1}{\lambda_1}$  und  $\nu_2 = \frac{1}{\lambda_2}$  die reziproken Wellenlängen, also die Wellenzahlen sind.

Ein weiterer Vorteil der Reziprokskala ist von J. W. T. WALSH in seinem Buch [6] niedergelegt worden. Verändert man den Meßbereich eines Pyrometers, z. B. durch ein Graufilter, so ist für jeden Punkt der Eichkurve  $T$  eine neue Temperatur  $T'$  zugeordnet nach

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} - \frac{\lambda}{c_2} \ln D$$

oder, wenn man  $D$  durch Temperaturmessungen  $T_1$  und  $T_2$  ermittelt

$$\frac{\lambda}{c_2} \ln D = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

bzw.

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

und in der reziproken Skala einfach

$$R - R' = R_1 - R_2.$$

Die Eichkurve verschiebt sich demnach in der Reziprokskala um ein konstantes Stück für alle Temperaturen. Da außerdem im Gültigkeitsbereich des BEERschen Gesetzes

$$D = e^{-\alpha d} \quad \text{bzw.} \quad \ln D = -\alpha d$$

ist, muß die Verschiebung der Eichkurve proportional zur Dicke  $d$  bzw. zum Absorptionskoeffizienten  $\alpha$  des Grauglases sein.



Aus rein praktischen Gründen scheint also die reziproke Temperaturskala im Gebrauch recht angenehm zu sein. Man hat schon vor 20 Jahren als Maß für diese Skala das Mired  $= \frac{10^6}{T} \left( 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{K}} \right)$  eingeführt.

Dennoch findet man selbst in der angelsächsischen Literatur kaum Temperaturen in Mired angegeben. Der Grund ist zweifellos der, daß die Vorteile nur in seltenen Fällen ausgenutzt werden, zumal geeignete Nomogramme zur Verfügung stehen (s. z. B. [7]). Erst in letzter Zeit hat FÖRSTERLING [8] wieder auf diese Skala aufmerksam gemacht.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einige Ergebnisse, die über die Meßgenauigkeit von Teilstrahlungs-pyrometern gewonnen werden konnten [9], in der  $1/T$ -Skala darzustellen und die dabei auftretenden Probleme und Vorteile aufzuzeigen.

B. Ausgehend von der prozentualen Unterschiedsschwelle  $\frac{\Delta J}{J}$  des menschlichen Auges für Glühfaden-pyrometer [10] erhält man eine Unterscheidungsmöglichkeit für Temperaturunterschiede  $\Delta T$  bei quasimonochromatischer (d. h. durch Filter eingegengter) Intensitätspyrometrie von

$$\Delta T = T^2 \frac{\lambda}{c_2} \cdot \frac{\Delta J}{J} \cdot \frac{\exp(c_2/\lambda T) - 1}{\exp(c_2/\lambda T)}$$

worin  $c_2 = 1,438$  cm Grad die zweite Konstante der PLANCKschen Strahlungsformel und  $\lambda$  die Wellenlänge in cm sind. Der  $e$ -Potenzenbruch auf der rechten Seite ist im Bereich der WIENSchen Näherung  $\left( \frac{c_2}{\lambda T} > 1 \right)$  praktisch mit 1 identisch. Zwischen einem Beobachtungsfehler  $\Delta T$  und dem korrespondierenden Fehler in der reziproken Skala  $\Delta \frac{1}{T} = \Delta R$  besteht der

Zusammenhang  $\Delta R = -\frac{1}{T^2} \cdot \Delta T$ , so daß also für eine konstante Schwelle  $\frac{\Delta J}{J}$  auch  $\Delta R$  konstant sein müßte. Tatsächlich ist für Teilstrahlungs-pyrometer oberhalb einer bestimmten Temperatur eine annähernd konstante Schwelle vorhanden, wie aus Abb. 1 hervorgeht (z. T. nach 9). Die Meßfehler eines Pyrometers setzen sich aber aus vielen Einflußgrößen zusammen. Neben der Schwelle sind noch die Fehler

Tabelle 1. Zusammenwirken der einzelnen Fehler bei einem technischen Glühfadenpyrometer, vgl. [9]. Meßbereich bei  $1400^\circ\text{C}$  unterteilt. Die Eichung wird vor einer Bandlampe vorgenommen, die mit einem Strommesser der Klasse 0,2 eingestellt wird, der bei 1400 bzw.  $2000^\circ\text{C}$  den Vollausschlag zweier Meßbereiche erreicht.

Temperatur (° C)	Unterschieds- schwelle (°C)		Fehler durch Strommesser (° C)		Kalibrier- fehler  (°C)	absoluter Gesamtfehler (°C)			
	grün 4500 AE	rot 6500 AE	Klasse			Strommesser Klasse 0,2		Strommesser Klasse 0,5	
			0,2	0,5		grün	rot	grün	rot
700	5,3	2,2	7,9	20,7	7,1	11,9	10,8	25,0	22,0
800	2,9	1,4	6,7	16,7	6,3	9,6	9,3	18,5	17,9
1000	1,3	0,7	3,3	8,3	4,7	5,9	5,8	9,6	9,6
1200	0,8	1,0	2,1	5,2	4,6	5,1	5,2	7,0	7,0
1400	1,0	1,3	1,6	4,0	4,6	5,0	5,1	6,2	6,2
1500	1,2	1,5	4,3	10,8	6,5	7,9	7,9	12,6	12,7
1700	1,5	1,8	3,4	8,4	6,4	7,4	7,5	10,6	10,7
1800	1,6	2,0	3,1	7,7	6,6	7,5	7,6	10,5	10,3
1900	1,7	2,2	2,9	7,2	6,6	7,4	7,5	9,9	10,0
2000	1,9	2,4	2,6	6,6	6,6	7,3	7,5	9,5	9,6

durch den Strommesser, die Kalibrierfehler und die reinen Ablesefehler von Einfluß. Nur in Ausnahmefällen ist zu erwarten, daß die Fehler der Schwelle überwiegen. Die übrigen Fehler haben aber im allgemeinen einen völlig anderen Verlauf und lassen daher die Vermutung, daß die Meßfehler sich in der Miredskala besonders einfach darstellen ließen, a priori unrichtig erscheinen.

Tabelle 1 gibt einen Überblick über das Zusammenwirken der einzelnen Fehlerursachen bei einem technischen Glühfadenpyrometer. Wie man erkennt, überwiegen die Anteile von Meßinstrument (und Pyrometerlampe) und die Eichfehler bei weitem. Setzt man für die Abhängigkeit des Stromes  $i$  der Pyrometerlampe näherungsweise <sup>1</sup>

$$i = 84,4 + 14,77 \cdot 10^{-12} T^4$$

bzw.

$$\frac{dT}{di} = 16,5 \cdot 10^9 T^{-3} \quad \begin{matrix} (T \text{ in } ^\circ\text{K}) \\ (i \text{ in mA}) \end{matrix}$$

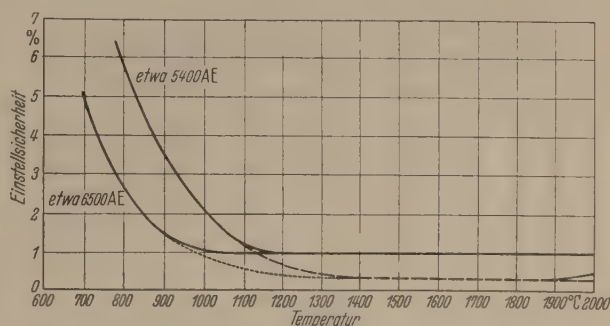


Abb. 1. Visuelle Einstellgenauigkeit in % der Leuchtdichte (Schwelle) in Abhängigkeit von der Temperatur für ein Präzisionspyrometer (gestrichelt) und für ein technisches Fadenpyrometer gleicher Durchlässigkeit (ausgezogen) z. T. nach [11].

so erhält man für den Temperaturfehler, der durch das Meßinstrument bedingt ist

$$\Delta T = \frac{dT}{di} \cdot \Delta i = \frac{dT}{di} \left( \frac{\Delta i}{i} \right)_v \cdot i_v$$

Darin ist  $\left( \frac{\Delta i}{i} \right)_v$  der relative Strommeßfehler des Meßinstrumentes beim Vollausschlag, d. h. seine Fehlerklasse und  $i_v$  ist der beim Vollausschlag gemessene Strom. Mit den o. a. numerischen Werten hat man dann beispielsweise bei 0,2% Fehler und 200 mA Vollausschlag:

$$T = 16,5 \cdot 10^{-9} T^{-3} \cdot 0,002 \cdot 200 = 6,60 \cdot 10^{-9} T^{-3}$$

Man erhält also für diese Fehler keine Konstanz in der Reziprokskala sondern einen Abfall mit  $1/T^6$ .

Die Eichfehler setzen sich wieder aus zwei Teilen zusammen, der Schwelle und einem Instrumentenfehler. Hier gelten also die gleichen Überlegungen wie oben.

Trägt man nach Abb. 2 die drei Fehlerursachen einzeln als Funktion der Temperatur auf, so erkennt man den geschilderten Verlauf. Dabei ist ein technisches Glühfadenpyrometer mit Rotfilter und einem Instrument Klasse 0,2 als Beispiel gewählt worden. Abb. 2 stimmt mit den Angaben in Tab. 1 überein. Man erkennt,

<sup>1</sup> nach Angaben von JAGERSBERGER [11] berechnet.



daß man sogar hier bei großzügiger Auslegung mit annähernd konstanten Fehlern in der  $1/T$ -Skala rechnen kann. Im unteren Teil der Abb. 2 ist z. B. das Gebiet zwischen  $1,5 < R < 2,5$  gesondert eingetragen. Im oberen Teil der Abb. 2 korrespondiert damit ein ansteigendes Gebiet, das die große Unsicherheit der Angabe  $\Delta R = \text{konst.}$  in der  $1/T$ -Skala zeigt, wenn man sich auf  $^{\circ}\text{K}$  bezieht.

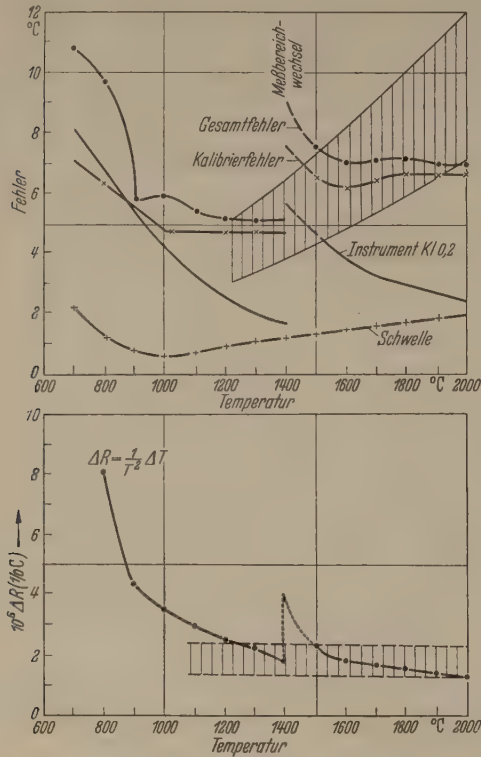


Abb. 2. Zusammenwirken der einzelnen Fehlerursachen bei einem technischen Fadenpyrometer in linearer Temperaturskala (oben) und Gesamtfehler in reziproker Temperaturskala (unten). Die Bereiche des Strommessers Klasse 0,2 für den Pyrometerlampenstrom (und ebenso für den Bandlampenstrom beim Eichen) sind so gewählt, daß für 1400 bzw. 2000° C Vollausschlag erreicht wird. Die punktierten Übergänge zwischen den Meßbereichen sind geschätzt. Die gestrichelten Gebiete in beiden Darstellungen korrespondieren.

In anderen Fällen kann der Konstanzbereich wesentlich enger sein. Zunächst zeigt Tab. 2 die durch die Unterschiedsschwelle hervorgerufenen Fehler an einem Präzisionsglühfadenpyrometer mit optisch sehr hoher Qualität. Sie ist in  $\Delta T$  und  $\Delta R$  für die Wellenlängen 5400 (grün) und 6500 AE (rot) angegeben. Wie man erkennt, ist etwa oberhalb von 1300° C mit einigermaßen konstanten Werten von  $\Delta R$  zu rechnen. Sie liegen hier zwischen 0,11 und  $0,16 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{K}$  (grün) bzw. 0,18 u.  $0,23 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{K}$  (rot).

Gemäß der einfachen Beziehung

$$\Delta R = \frac{1}{T^2} \cdot \Delta T = -\frac{\lambda}{c_2} \cdot \frac{\Delta J}{J} \frac{e^{c_2/\lambda T} - 1}{e^{c_2/\lambda T}}$$

ergeben sich für die bis zu  $\frac{\Delta J}{J} =$

Tabelle 2. Unterschiedsschwelle  $\frac{\Delta J}{J}$  und dadurch hervorgerufene Temperaturmeßfehler  $\Delta T$  in der linearen und  $\Delta R$  in der reziproken Temperaturskala für ein Präzisionsglühfadenpyrometer. Die Schwankungen von  $\Delta R$  oberhalb von 1100 (rot) bzw. 1300° C (grün) sind durch Meßfehler bei der experimentellen Bestimmung von  $\Delta T$  bzw. durch Abrundungsfehler bei  $\Delta T$  zu erklären.

Temperatur	$\lambda = 6500 \text{ AE (rot)}$				$\lambda = 5400 \text{ AE (grün)}$			
	Schwelle $\frac{\Delta J}{J}$ (%)	Meßfehler			Schwelle $\frac{\Delta J}{J}$ (%)	Meßfehler		
		$T (^{\circ}\text{K})$	$R (1/^{\circ}\text{K})$			$T (^{\circ}\text{K})$	$R (1/^{\circ}\text{K})$	
700	5,0	2,2	$2,32 \cdot 10^{-6}$		10	5,3	$5,67 \cdot 10^{-6}$	
800	2,7	1,4	1,20		6,0	2,9	2,50	
900	1,4	0,9	0,65		3,5	1,9	1,38	
1000	0,7	0,7	0,43		2,1	1,3	0,80	
1100	0,4	0,5	0,26		1,2	0,7	0,37	
1200	0,4	0,4	0,18		0,7	0,5	0,23	
1300	0,4	0,5	0,20		0,6	0,4	0,16	
1400	0,4	0,5	0,18		0,5	0,4	0,13	
1500	0,4	0,6	0,19		0,4	0,4	0,11	
1600	0,4	0,7	0,20		0,4	0,5	0,14	
1700	0,4	0,7	0,18		0,4	0,5	0,13	
1800	0,4	0,8	0,19		0,4	0,6	0,14	
1900	0,4	1,0	0,21		0,4	0,7	0,15	
2000	0,5	1,2	0,23		0,4	0,8	0,15	

0,5% abnehmenden Schwellen entsprechend niedrige Werte für  $\Delta R$ .

Tab. 3 zeigt die absoluten Gesamtfehler des gleichen Instrumentes in der  $1/T$ -Skala. Bei Verwendung eines Strommessers der Klasse 0,2 überwiegen die Fehler des Meßinstrumentes so stark, daß man sich nur schwer entschließen kann, ein Gebiet mit konstantem  $\Delta R$  auszuwählen. Die Schwelle ist hier noch kleiner als bei dem oben beschriebenen technischen Pyrometer. Insbesondere

Tabelle 3. Absolute Gesamtfehler eines Präzisions-Glühfadenpyrometers in linearer und reziproker Skala. Meßbereich des Anzeigensinstrumentes bei 1400° C unterteilt. Für den Kompensator ist ebenfalls Fehlerzunahme nach

$$\Delta i = \left( \frac{\Delta i}{i} \right)_v \cdot i_v \text{ angenommen, vgl. dazu Seite 87.}$$

Die Kalibrierung erfolgt vor einem an den Goldpunkt usw. angeschlossenen Sekundärnormal, dessen Stromstärke mit einem Kompensator nahezu fehlerfrei gemessen wird. Darum ist der Kalibrierfehler im wesentlichen die dreifache Schwelle.

Temperatur (°C)	absoluter Gesamtfehler							
	Strommesser Kl. 0,2				Kompensator Kl. 0,05			
	grün		rot		grün		rot	
	$\Delta T$ (°K)	$\Delta R$ (1/°K)	$\Delta T$ (°K)	$\Delta R$ (1/°K)	$\Delta T$ (°K)	$\Delta R$ (1/°K)	$\Delta T$ (°K)	$\Delta R$ (1/°K)
700	13,3	$14,0 \cdot 10^{-6}$	9,1	$9,6 \cdot 10^{-6}$	10,9	$11,5 \cdot 10^{-6}$	5,0	$5,3 \cdot 10^{-6}$
800	8,8	7,6	7,2	6,2	6,0	5,2	3,0	2,6
900	6,7	4,8	5,8	4,2	4,1	2,9	2,4	1,74
1000	4,3	2,7	3,6	2,2	2,8	1,73	1,7	1,05
1100	3,1	1,6	3,0	1,6	1,7	0,90	1,4	0,74
1200	2,4	1,1	2,3	1,06	1,3	0,60	1,2	0,55
1300	2,2	0,89	2,3	0,93	1,2	0,48	1,3	0,52
1400	1,9	0,68	2,0	0,72	1,1	0,39	1,3	0,46
1500	4,5	1,43	4,5	1,43	1,6	0,51	1,8	0,57
1600	3,8	1,08	3,9	1,11	1,6	0,46	1,8	0,51
1700	3,7	0,95	3,8	0,98	1,6	0,41	1,8	0,46
1800	3,4	0,79	3,5	0,82	1,7	0,40	1,9	0,44
1900	3,3	0,70	3,6	0,77	1,7	0,36	2,2	0,47
2000	3,1	0,60	3,6	0,70	1,8	0,35	2,6	0,51

Hier überwiegt als Fehlerursache | Strommesser | Strommesser | 4-fache Schwelle | 4-fache Schwelle



Tabelle 4. Nur durch die Schwelle hervorgerufene Einstellfehler eines technischen Teilstrahlungs-pyrometers mit Graukeilabgleich. Wellenlänge: rund 6500 ÅE (rot).  $t_0$  ist die feste Temperatur des Vergleichsfadens, die die Helligkeit des Gesichtsfeldes bestimmt.

Temperatur (° C)	Einstellfehler			
	$t_0 = 800^{\circ}\text{C}$		$t_0 = 900^{\circ}\text{C}$	
	$\Delta T$ (° K)	$\Delta R$ (1/° K)	$\Delta T$ (° K)	$\Delta R$ (1/° K)
800	1,5	$1,29 \cdot 10^{-6}$	—	—
900	1,7	1,23	0,9	$0,65 \cdot 10^{-6}$
1000	2,0	1,24	1,0	0,62
1100	2,3	1,22	1,2	0,63
1200	2,7	1,24	1,4	0,64
1300	3,0	1,21	1,6	0,65
1400	3,5	1,25	1,7	0,61
1500	3,9	1,24	1,9	0,60
1600	4,4	1,25	2,2	0,63
1700	4,8	1,23	2,4	0,62
1800	5,3	1,23	2,7	0,63
1900	5,8	1,23	2,9	0,62
2000	6,4	$1,24 \cdot 10^{-6}$	3,3	$0,64 \cdot 10^{-6}$

besondere die Übergänge der beiden Meßbereiche bei 1400° C zeichnen sich sehr stark ab.

Verwendet man dagegen einen Kompensator zur Strommessung, macht also die Strommeßfehler kleiner, so erhält man befriedigende Konstanz oberhalb von rund 1300° C, ähnlich wie bei der in Tab. 3 betrachteten Schwelle.

Die Tab. 4 und 5 geben die gleichen Verhältnisse für ein technisches Pyrometer mit Graukeilabgleich wieder. Bei diesem Instrument wird die Pyrometerlampe einmal auf eine bestimmte Temperatur  $t_0$  gebracht und mit Hilfe eines Strommessers Klasse 0,2 auf dieser Temperatur gehalten. Der Abgleich erfolgt durch Schwächung des Lichtes vom anzumessenden Gegenstand mittels eines Graukeils mit exponentiell abnehmender Durchlässigkeit. Die Stellung des Keiles wird (annähernd linear) in ° C geeicht.

Tabelle 5. Absoluter Gesamtfehler eines technischen Teilstrahlungs-pyrometers mit Abgleich durch einen Graukeil. Die Vergleichslampe wird mit einem Instrument der Klasse 0,2 dicht unter dem Vollausschlag konstant gehalten. Die Eichung erfolgt vor einer Bandlampe, deren Strom mit einem Strommesser der Klasse 0,2 gemessen wird. Seine Bereiche sind so eingerichtet, daß bei 1400 bzw. 2000° C Vollausschlag erreicht wird. Die Fehler des Strommessers überwiegen.

Temperatur (° C)	absoluter Gesamtfehler			
	$t_0 = 800^{\circ}\text{C}$		$t_0 = 900^{\circ}\text{C}$	
	$\Delta T$ (° K)	$\Delta R$ (1/° K)	$\Delta T$ (° K)	$\Delta R$ (1/° K)
800	8,2	$7,1 \cdot 10^{-6}$	—	—
900	8,1	5,9	6,9	$5,0 \cdot 10^{-6}$
1000	8,2	5,1	6,6	4,1
1100	8,9	4,7	6,9	3,6
1200	9,7	4,4	7,2	3,3
1300	10,5	4,2	7,5	3,0
1400	11,5	4,1	8,0	2,9
1500	13,5	4,3	9,7	3,1
1600	14,5	4,1	10,1	2,9
1700	15,9	4,1	10,8	2,8
1800	17,0	4,0	11,6	2,7
1900	18,8	4,0	12,2	2,6
2000	20,4	4,0	13,0	2,5

Die Schwelle ist hier in der  $1/T$ -Skala recht befriedigend konstant. Obwohl hier die Fehler von der Strommessung her bei weitem überwiegen, darf man Konstanz von  $\Delta R$  oberhalb von 1100 bzw. 1200° C annehmen.

Macht man die Strommeßfehler so klein — etwa durch Kompensatoren — daß nur die Schwelle die Fehler bestimmt, so ist die Konstanz wie zu erwarten vorhanden. In den übrigen Fällen tritt sie dann auf, wenn die Fehlerkurven sich zufällig im richtigen Sinne ergänzen. Zusammenfassend ist also festzustellen, daß man bei Graukeilpyrometern oberhalb von rund 1200° C und bei technischen Pyrometern in gewissem, überschlägigem Sinne  $\Delta R$  als konstant ansehen darf. Bei Präzisionspyrometern mit kleinen Einstellschwellen und bei technischen Pyrometern mit Ablesung an Strommessern schlechterer Klassen als 0,2 dagegen ist die Konstanz nicht erfüllt.

Tabelle 6. Aus der Farbmetrik und der Farbunterschiedsschwelle berechnete Meßgenauigkeit der Farbtemperatur im Vergleich zu den von PRIEST angegebenen Werten.

Temperatur (° K)	farbgleiche Wellenlänge des schwarzen Körpers (ÅE)	Farbschwelle $\Delta\lambda$ (ÅE)	erkennbarer Farbtemperaturunterschied $\Delta F$ (° K)	
			aus der Farbmetrik	
				nach PRIEST $\Delta R \approx 0,8 \cdot 10^{-6} / ^{\circ}\text{K}$
800	6150	15	rund 15	0,5
1300	5970	11	55	1,4
1900	5890	9	90	3,0
2500	5840	8,5	125	5,0
3200	5770	8	160	8,0

C. Auswirkungen auf die Farbpyrometrie.

Die sogenannte Farbunterschiedsschwelle  $\Delta\lambda$ , also das Vermögen des Auges, eine Farbe mit der farbengleichen Wellenlänge  $\lambda$  von einer anderen mit  $\Delta\lambda + \lambda$  zu unterscheiden, ist von sehr vielen Autoren untersucht worden. Wir folgen den Angaben von BOUMA [14], der die Farbschwellen für die Spektralfarben angibt. Nach TYNDALL [12] und HAASE [13] ändert sich die Farbschwelle oberhalb einer Farbdichte von  $p > 50\%$  nicht wesentlich und ist mit der Farbschwelle für die spektralen Farben identisch. Dagegen wird für geringere Farbdichten, also in der Nähe des Weißpunktes das Unterscheidungsvermögen schnell schlechter. Bis rund 3000° sind demnach Farbpyrometer günstigsten Falles mit den in Tab. 6 angegebenen Meßfehlern zu verwenden.

Wie man erkennt, ist die Meßgenauigkeit schon bei 1000° C unbefriedigend. Diese aus der Farbmetrik gewonnenen Zahlen für die Grenze der Meßgenauigkeit stehen mit dem Satz von PRIEST [1] in völligem Gegensatz. Nach PRIEST ist die eben merkliche Differenz der reziproken Farbtemperatur annähernd von der Farbtemperatur unabhängig und etwa  $1/T = 0,6$  bis  $0,8 \cdot 10^{-6}$  (1/° K). Damit würde man undiskutable Farbschwellen zwischen 0,2 und 0,3 ÅE erhalten. Die Messungen, die PRIEST ausgeführt hat, sind zweifellos reell, doch werden Messungen der Farbschwelle durch Unterschiede der Leuchtdichte sehr leicht verfälscht. PRIEST hat wahrscheinlich keine reine Farbpyrometrie sondern im wesentlichen Intensitätspyrometrie getrieben mit einem geringen Einfluß der Farbe, hervorgerufen durch zusätzlichen Farbabgleich. Wie aus Tab. 2 hervorgeht, erreicht man mit Präzisionsglühfadenpyrometern Werte von  $\Delta R$ , die noch unter den von PRIEST ermittelten Werten liegen.



Seine Angaben entsprechen einer Temperaturmeßgenauigkeit von  $0,5^\circ\text{K}$  bei  $800^\circ\text{K}$  bis  $7^\circ\text{K}$  bei  $3200^\circ\text{K}$ . Das entspricht bei einer wirksamen Wellenlänge von rund  $5800^\circ\text{K}$  einer photometrischen Genauigkeit von rund 1,7%, die bei kleinem Gesichtsfeld oder einer Leuchtdichte des Gesichtsfeldes von weniger als 100 apostilb vorhanden gewesen sein könnte. Wie nicht anders zu erwarten, ist der reziproke Fehler der Farbtemperatur (in der Farbmeterik) nicht konstant sondern liegt zwischen  $15$  und  $32 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{K}$ .

#### D. Zusammenfassung.

Bei technischen Teilstrahlungs-pyrometern wird der Einfluß des Überganges von der linearen zur reziproken Temperaturskala auf die Darstellung der Meßfehler betrachtet. In allen den Fällen, in denen die Eigenschaften des menschlichen Auges, die Schwelle, den Fehler zum größeren Teil allein bestimmen, ist ein konstanter Fehler in der Reziprokskala zu erwarten. Er läßt sich tatsächlich finden. In allen anderen Fällen dagegen ist von vornherein ein konstanter Fehler nicht zu vermuten. Er findet sich trotzdem, weil sich die in verschiedener Weise von der Temperatur abhängigen Fehlerquellen manchmal in günstiger Weise ergänzen. Das ist der Fall zum Beispiel oberhalb von  $1200^\circ\text{C}$  bei technischen Intensitätspyrometern mit Graukeilabgleich.

Auch bei technischen Pyrometern mit Fadenabgleich kann bei Verwendung guter Anzeigeinstrumente und unter Voraussetzung mäßig guter Schwellen der Fehler oberhalb von etwa  $1400^\circ\text{C}$  als annähernd in der Reziprokskala angesehen werden.

Die Abweichung des Satzes von PRIEST von der aus der Farbmeterik gewonnenen Meßgenauigkeit reiner Farbabgleich-Farbpymeter läßt sich durch die Annahme gleichzeitiger Intensitäts- und Farbeinstellung erklären.

**Literatur:** [1] PRIEST, J. G.: Bull. Bur. Stand. 18, 223 (1922). — [2] PRIEST, J. G.: J. O. S. A. 23, 41 (1933). — [3] GAGE, H. P.: J. O. S. A. 23, 46 (1933). — [4] ESTEY, R. S.: J. O. S. A. 26, 293 (1936). — [5] WEAVER, K. S.: J. O. S. A. 26, 339 (1936). — [6] WALSH, J. W. T.: Photometry, 2. Aufl. London 1953. — [7] EULER, J. u. R. LUDWIG: Z. ang. Phys. 2, 362 (1950). — [8] FÖRSTERLING, H.: ATM V 435—1. Lief. 217, Februar 1954, S. 35. — [9] EULER, J.: Meßgenauigkeit von Teilstrahlungs-pyrometern ATM J 321—6, Dez. 1954, Lief. 227, S. 277. — [10] EULER, J. u. W. SCHNEIDER: Z. ang. Phys. 3, 459 (1951). — [11] JAGERSBERGER, A.: Bull. Schweiz. ETV, 40, 179 (1949). — [12] TYNDALL, E. P. T.: Journ. Opt. Soc. Amer. 23, 15 (1933). — [13] HAASE, G.: Annalen (V), 20, 75 (1934). — [14] BOUMA, P. J.: Farbe u. Farbwahrnehmung deutsche Übers. 1951, Eindhoven S. 128 ff.

D. JOACHIM EULER.

Frankfurt/M. Zentrallaboratorium der Akkumulatorenfabrik AG., Neue Mainzer Str. 54.

## Rektifikation idealer Dreistoffgemische unter der Voraussetzung, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Flüssigkeitsseite liegt\*.

VON ERNST A. RISCHÉ.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 1. Juli 1954.)

#### Einleitung.

Im Jahre 1946 gelang es HAUSEN [1], die Differentialgleichung der Rektifikation idealer Dreistoffgemische exakt zu lösen und eine einfache Gleichung zur Berechnung des Verlaufes der Zusammensetzungsänderung von Flüssigkeit und Dampf in der Säule bei der kontinuierlichen Rektifikation abzuleiten. Diese Lösung ist nicht nur für die Berechnung der Rektifikation idealer und angenähert idealer Gemische wie z. B. des Sauerstoff-Stickstoff-Argon-Gemisches von Bedeutung, sondern sie vermittelt auch einige neue, interessante physikalische Erkenntnisse. Bei der Aufstellung der zugrunde gelegten Differentialgleichung wurde angenommen, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Dampfseite liegt. Diese Annahme stellt einen Grenzfall dar, der praktisch wohl kaum auftritt. Um den Einfluß dieser Annahme und damit der Stoffaustauschwiderstände in Flüssigkeit und Dampf auf den Verlauf der Rektifikation zu klären, hat der Verfasser den entgegengesetzten Grenzfall untersucht, bei dem nur auf der Flüssigkeitsseite ein Widerstand des Stoffaustausches vorausgesetzt wird. Es ergeben sich hierbei wesentliche Unterschiede für den Verlauf der Konzentrationsänderungen von Flüssigkeit und Dampf in der Säule und damit auch für die diesen Verlauf beschreibenden Rektifikationslinien. Die wichtigsten Überlegungen

dieser Untersuchung und die Ergebnisse sollen im folgenden näher besprochen werden.

#### Grundlegende Annahmen.

Um die beiden Grenzfälle und die für sie geltenden Differentialgleichungen klar zu machen, sei kurz an die Vorstellungen der Zweifilmtheorie erinnert. Die unmittelbar an der Grenzfläche zusammentreffenden Flüssigkeits- und Dampfteilchen haben Gleichgewichtszusammensetzung. Im allgemeinen Falle nimmt auf Grund des Widerstandes des Stoffaustausches der Gehalt an Leichtersiedendem im Dampf mit dem Abstand von der Grenzfläche ab, während in der Flüssigkeit der Gehalt an Leichtersiedendem mit dem Abstand von der Grenzfläche wächst. Das Verhältnis der Konzentrationsunterschiede in Dampf und Flüssigkeit hängt vom Strömungszustand und von den Stoffeigenschaften ab. Es sind zwei Grenzfälle denkbar:

1. Der Widerstand des Stoffaustausches liegt allein auf der Dampfseite. Der Konzentrationsunterschied zwischen Grenzfläche und Kern der Flüssigkeit ist unendlich klein, und die Konzentrationsdifferenz zwischen Grenzfläche und Dampf kern ist allein die treibende Kraft des Stoffaustausches.

2. Der Widerstand des Stoffaustausches liegt allein auf der Flüssigkeitsseite. In diesem Fall ist im Dampf kein Konzentrationsgefälle vorhanden, und der Stoffaustausch wird allein durch den Konzentrationsunterschied zwischen Grenzfläche und Kern der Flüssigkeit bewirkt.

\* Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. H. HAUSEN.



Wie schon erwähnt, soll dieser zweite Grenzfall der nachfolgenden Betrachtung zugrunde gelegt werden. Die weiteren Annahmen betreffen das Verhalten idealer Dreistoffgemische.

### Gleichgewicht idealer Dreistoffgemische.

In der Arbeit von HAUSEN und auch in der vorliegenden Untersuchung werden solche Gemische als ideal angesehen, die bei allen Konzentrationen der Flüssigkeit das *RAOULTS*che Gesetz befolgen, und deren Dampf als Gemisch idealer Gase behandelt werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich folgende Beziehungen für die Zusammensetzung des Dampfes im Gleichgewicht:

$$\left. \begin{aligned} y_I^* &= \frac{\varepsilon_I x_I}{1 + (\varepsilon_I - 1) x_I + (\varepsilon_{II} - 1) x_{II}} \\ y_{II}^* &= \frac{\varepsilon_{II} x_{II}}{1 + (\varepsilon_I - 1) x_I + (\varepsilon_{II} - 1) x_{II}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Sterne deuten an, daß der Dampf die zu einer Flüssigkeitszusammensetzung  $x_I, x_{II}$  zugehörige Gleichgewichtszusammensetzung hat.  $\varepsilon_I = \frac{\pi_I}{\pi_{III}}$  und  $\varepsilon_{II} = \frac{\pi_{II}}{\pi_{III}}$  sind die Verhältnisse der Dampfdrucke  $\pi_I, \pi_{II}$  und  $\pi_{III}$  der reinen Komponenten. Da sich  $\varepsilon_I$  und  $\varepsilon_{II}$  in dem bei der Rektifikation interessierenden Temperaturbereich nur verhältnismäßig wenig ändern, sollen sie hier als konstant angesehen werden.

Durch Umformung der Gl. (1) und Auflösung nach  $x$  ergeben sich die folgenden Gl. (2), mit denen sich die Zusammensetzungen  $x_I^*, x_{II}^*$  einer Flüssigkeit, die mit einem Dampf der Zusammensetzung  $y_I, y_{II}$  im Gleichgewicht steht, berechnen lassen. Hierbei ist das Gleichgewicht durch einen Stern an  $x_I$  und  $x_{II}$  gekennzeichnet.

$$\left. \begin{aligned} x_I^* &= \frac{\frac{1}{\varepsilon_I} y_I}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_I} - 1\right) y_I + \left(\frac{1}{\varepsilon_{II}} - 1\right) y_{II}} \\ x_{II}^* &= \frac{\frac{1}{\varepsilon_{II}} y_{II}}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_I} - 1\right) y_I + \left(\frac{1}{\varepsilon_{II}} - 1\right) y_{II}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Das Gleichgewicht und den Verlauf der Zusammensetzungsänderung bei der Rektifikation von Dreistoffgemischen veranschaulicht man zweckmäßig in einem Dreieckskoordinatensystem, in dem der Gehalt an Stoff II abhängig vom Gehalt an Stoff I aufgetragen wird. Im allgemeinen Falle ergeben sich bei der Rektifikation zwei getrennte Kurven  $x_{II} = f(x_I)$  und  $y_{II} = f(y_I)$  für Flüssigkeit und Dampf. Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks, die alle möglichen Zusammensetzungen umfaßt, werde Gehaltsdreieck genannt.

### Rektifikationsscheidelinien.

Für die Behandlung der Rektifikation idealer Dreistoffgemische sind die Rektifikationsscheidelinien von großer Bedeutung. Das Wesen der Rektifikationsscheidelinien versteht man am besten, wenn man ein praktisches Beispiel betrachtet. Bei der Zerlegung der Luft im Einsäulenapparat gibt man flüssige Luft oben als „Rücklauf“ in die Säule. Infolge der Rektifikationswirkung reichert sich die Flüssigkeit auf dem Wege

nach unten so weit mit Sauerstoff an, daß die Blase schließlich fast reinen Sauerstoff enthält. Nach der Wiederverdampfung dieses Sauerstoffs wird ein Teil als Endprodukt entnommen. Der Rest steigt in der Säule auf und tritt mit einem Sauerstoffgehalt von 7–8% oben aus. Durch Änderung der Bodenzahl der Säule und des Rücklaufverhältnisses läßt sich der Sauerstoffgehalt des oben austretenden Dampfes verändern. Dies ist von wesentlichem Einfluß auf den Verlauf der Rektifikation, wie die in Abb. 1 eingezeichneten Rektifikationslinien zeigen, die für den früher behandelten Fall gelten, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Dampfseite liegt. Die ausgezogenen Linien stellen den Zusammensetzungsverlauf der Flüssigkeit und die gestrichelten Linien den Zusammensetzungsverlauf des Dampfes dar. Der

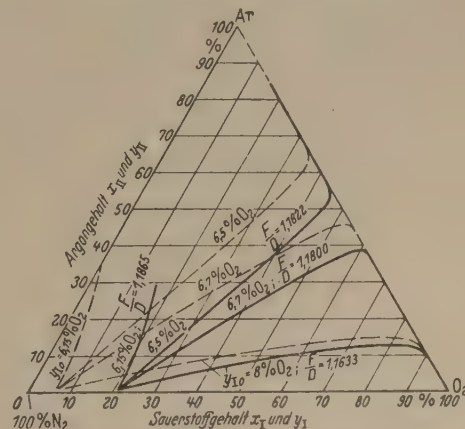


Abb. 1. Rektifikation im Einsäulenapparat.

Sauerstoffgehalt  $y_{I0}$  des oben austretenden Dampfes ist an den Kurven eingetragen. Nur die Kurven für  $y_{I0} = 8\% \text{ O}_2$  und  $y_{I0} = 6,7\% \text{ O}_2$  verlaufen zum rechten Eckpunkt hin, der reinem Sauerstoff entspricht. Der Kurvenverlauf zeigt, daß in diesen Fällen bei der Rektifikation eine zwar starke, aber nur vorübergehende Argonanreicherung stattfindet. Bei  $y_{I0} = 6,5\% \text{ O}_2$  hingegen reichert sich das Argon so sehr an, daß die Kurven schließlich zur Argonseite hin abbiegen. Die Gewinnung von reinem Sauerstoff ist damit unmöglich. In diesem Fall ist die Sauerstoffanreicherung nur vorübergehend. Zwischen den Kurven für  $y_{I0} = 6,5\%$  und  $y_{I0} = 6,7\%$  muß eine Rektifikationslinie liegen, die das Gebiet dauernder Sauerstoffanreicherung vom Gebiet dauernder Argonanreicherung trennt. Rektifikationslinien dieser Art nennt HAUSEN Rektifikationsscheidelinien.

Für den Fall, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Dampfseite liegt, leitete HAUSEN für die Rektifikationsscheidelinien des Dampfes die Gleichung

$$y_{II} = \left[ \frac{\varepsilon_{II} - \varepsilon_I}{(1 - \varepsilon_{II}) \bar{y}_I^*} - \frac{1 - \varepsilon_I}{1 - \varepsilon_{II}} \right] (y_I - \bar{y}_I^*) \quad (3)$$

ab [1, 2].  $\bar{y}_I^*$  ist der Abszissenwert des Schnittpunktes der Rektifikationsscheidelinie des Dampfes mit der Grundlinie des Gehaltsdreiecks. Der Stern bedeutet, daß dieser Punkt einen Gleichgewichtspunkt darstellt. Für die Rektifikationsscheidelinien der Flüssigkeit ermittelte HAUSEN die Gleichung

$$x_{II} = \left[ \frac{\varepsilon_{II} - \varepsilon_I}{\varepsilon_I(1 - \varepsilon_{II}) \bar{x}_I} - \frac{\varepsilon_{II}(1 - \varepsilon_I)}{\varepsilon_I(1 - \varepsilon_{II})} \right] (x_I - \bar{x}_I), \quad (4)$$



in der  $\bar{x}_I$  den Abszissenwert des Schnittpunktes der Rektifikationsscheidelinie mit der Grundlinie bedeutet. Die Gl. (3) und (4) stellen im Gehaltsdreieck parallele Geraden dar. In der unter [1] genannten Arbeit zeigt HAUSEN ferner, daß die Rektifikationsscheidelinien Tangenten an Hüllkurven sind, die in Abb. 2 dargestellt sind. Für die Rektifikationsscheidelinien, die die Zusammensetzungsänderung der Flüssigkeit darstellen, ergibt sich hierbei eine andere Hüllkurve als für die Scheidelinien, die die Zusammensetzungsänderung des Dampfes darstellen.

Wie später noch abgeleitet werden wird, ergeben sich unabhängig von den Annahmen über die Verteilung der Widerstände des Stoffaustausches gleiche Rektifikationsscheidelinien und Hüllkurven.

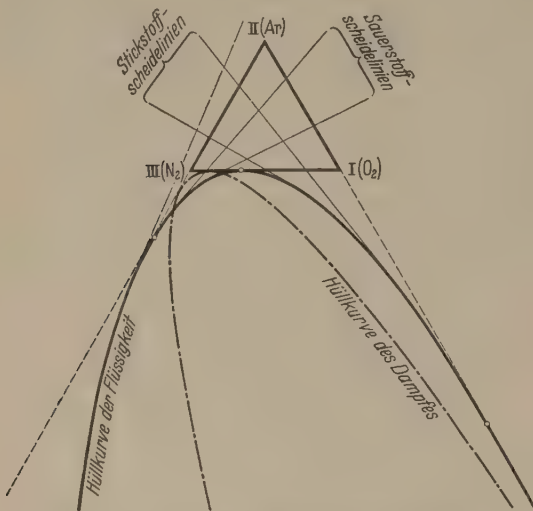


Abb. 2. Hüllkurve der Rektifikationsscheidelinien.

*Lösung der Differentialgleichung idealer Dreistoffgemische für den Fall, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Dampfseite liegt.*

Der Grundgedanke der Aufstellung und Lösung der Differentialgleichung für den Rektifikationsverlauf ist weitgehend unabhängig davon, ob der Widerstand des Stoffaustausches auf der Dampfseite oder Flüssigkeitsseite liegt. Daher sollen einige wichtige Punkte der Überlegungen von HAUSEN, an die später angeknüpft wird, wiederholt werden.

Flüssigkeit der Zusammensetzung  $x_I, x_{II}$  trete in einer Säule mit Dampf der Zusammensetzung  $y_I, y_{II}$  in Stoffaustausch. Im Gleichgewichtsfall hätte der Dampf die Zusammensetzung  $y_I^*, y_{II}^*$ . Nimmt man nun an, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Dampfseite liegt, so ist die Gleichgewichtsstörung  $y_I^* - y_I$  bzw.  $y_{II}^* - y_{II}$  die treibende Kraft des Stoffaustausches. Die ausgetauschten Mengen  $\Delta y_I$  und  $\Delta y_{II}$  sind nach den Gesetzen des Stoffaustausches diesen Konzentrationsunterschieden proportional:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_I &= \text{const} (y_I^* - y_I) \\ \Delta y_{II} &= \text{const} (y_{II}^* - y_{II}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Setzt man voraus, daß die auftretenden Konstanten für beide Bestandteile den gleichen Wert haben, und geht man zu unendlich kleinen Änderungen über, so ergibt sich eine Differentialgleichung, die nach Einsetzen der Beziehungen für das Gleichgewicht und der

Mengenbilanz folgende Gestalt hat:

$$\frac{dx_{II}}{dx_I} = \frac{\epsilon_{II} x_{II} - \left[ a_{II} + \frac{F}{D} x_{II} \right] \left[ 1 + (\epsilon_I - 1) x_I + (\epsilon_{II} - 1) x_{II} \right]}{\epsilon_I x_I - \left[ a_I + \frac{F}{D} x_I \right] \left[ 1 + (\epsilon_I - 1) x_I + (\epsilon_{II} - 1) x_{II} \right]} \quad (6)$$

$a_I$  und  $a_{II}$  sind die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} a_I &= y_{I0} - \frac{F}{D} x_{I0} \\ a_{II} &= y_{II0} - \frac{F}{D} x_{II0} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$x_{I0}, x_{II0}$  und  $y_{I0}, y_{II0}$  stellen die Flüssigkeits- und Dampfzusammensetzung an einer bestimmten Stelle der Säule dar.  $F$  ist die stündlich herabrieselnde Flüssigkeitsmenge und  $D$  die aufsteigende Dampfmenge.  $F$  und  $D$  werden längs der Säule als unveränderlich betrachtet.

Die Lösung dieser Differentialgleichung gelang HAUSEN nach Einführung neuer Veränderlicher  $\eta_I$  und  $\eta_{II}$ , die er wie folgt definiert:

$$\left. \begin{aligned} \eta_I &= x_I - x_{II} \\ \eta_{II} &= x_{II} - x_{II'} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$x_{II'}$  und  $x_{II}$  bestimmt er so, daß die konstanten Glieder in Zähler und Nenner der rechten Seite von Gl. (6) verschwinden. Daraus folgt für  $x_{II'}$  und  $x_{II}$

$$\left. \begin{aligned} x_{II'} &= \frac{a_I}{\epsilon_I - \frac{F}{D}} \\ x_{II} &= \frac{a_{II}}{\epsilon_{II} - \frac{F}{D}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wobei  $E_I$  die Abkürzung

$$E_I = 1 + (\epsilon_I - 1) x_{II} + (\epsilon_{II} - 1) x_{II'} \quad (10)$$

bedeutet. Aus Gl. (9) und (10) erhält man eine Gleichung dritten Grades für  $E$ :

$$\begin{aligned} E^3 + \underbrace{\left\{ \frac{D}{F} [-\epsilon_I - \epsilon_{II} + (\epsilon_I - 1) a_I + (\epsilon_{II} - 1) a_{II}] - 1 \right\}}_{a_1} E^2 \\ + \underbrace{\left\{ \left( \frac{D}{F} \right)^2 [\epsilon_I \epsilon_{II} - \epsilon_{II} (\epsilon_I - 1) a_I - \epsilon_I (\epsilon_{II} - 1) a_{II}] \right.}_{a_2} \\ \left. + \frac{F}{D} (\epsilon_I + \epsilon_{II}) \right\}}_{a_3} E - \underbrace{\left( \frac{D}{F} \right)^2 \epsilon_I \cdot \epsilon_{II}}_{a_3} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Setzt man die drei Lösungen  $E_I, E_r$  und  $E_{ob}$  dieser Gleichung in Gl. (9) ein, so erhält man drei Wertepaare von  $x_I$  und  $x_{II}$ , die drei Punkte im Gehaltsdreieck darstellen. Das Wertepaar, das den am weitesten links im Gehaltsdreieck liegenden Punkt bezeichnet, soll den Index „ $l$ “, das des am weitesten oben im Gehaltsdreieck liegenden Punktes den Index „ $ob$ “ und das Wertepaar des rechts liegenden Punktes den Index „ $r$ “ erhalten. Wie HAUSEN nachweist, stellen die drei Punkte Gleichgewichtspunkte dar. Zu diesen Punkten, die bestimmte Zusammensetzungen der Flüssigkeit



darstellen, lassen sich mit Hilfe der Beziehungen (1) für das Gleichgewicht die zugehörigen Dampfzusammensetzungen berechnen. Für die Dampfzusammensetzung ergeben sich so ebenfalls drei Wertepaare, die durch drei entsprechende Punkte im Gehaltsdreieck wiedergegeben werden.

Wichtig ist die Erkenntnis, daß man die genannten drei Punktpaare auch ohne Verwendung der Differentialgleichung und damit auch ohne eine bestimmte Annahme über den Stoffaustausch berechnen kann. Denkt man sich die Flüssigkeits- und Dampfzusammensetzung für eine bestimmte Stelle der betrachteten Rektifiziersäule gegeben, und sieht man auch die stündlich herabrieselnde Flüssigkeitsmenge  $F$  sowie die in der Stunde aufsteigende Dampfmenge  $D$  als bekannt an, so kann man mit Hilfe der Gleichgewichtsbeziehungen (1) oder (2) und der Mengenbilanz die Konzentrationen von Dampf und Flüssigkeit berechnen, die sich bei unendlich vielen Böden am oberen und unteren Ende einer Rektifiziersäule erreichen lassen. Denn bei unendlich vielen Böden kann die Rektifikation erst zum Ende kommen, wenn Gleichgewicht erreicht ist. Führt man diese Rechnung durch, dann ergeben sich wieder die Gl. (9) und (10), die zu den schon besprochenen drei Punktpaaren für Flüssigkeit und Dampf führen.

HAUSEN weist in seiner Arbeit nach, daß die jeweils drei Punkte für Flüssigkeit und Dampf Eckpunkte von zwei für die Rektifikation bedeutsamen Dreiecken sind, die er deshalb Rektifikationsdreiecke nennt. Die Seiten der Rektifikationsdreiecke werden von Rektifikationsscheidelinien gebildet. Er zeigt ferner, daß alle Rektifikationslinien, die den praktisch möglichen Rektifikationsverlauf darstellen, innerhalb des Rektifikationsdreiecks verlaufen.

Nachdem HAUSEN zwei Seiten des Rektifikationsdreiecks als neue Koordinaten  $\xi_I$  und  $\xi_{II}$  eingeführt hat, erhält er schließlich für die Lösung der Differentialgleichung die einfache Gestalt

$$\frac{1 - \xi_I - \xi_{II}}{\xi_I} = K \left( \frac{\xi_{II}}{\xi_I} \right)^n, \quad (12)$$

worin

$$n = \frac{x_{Ir} - x_{Il}}{x_{Ir} - x_{Iob}} \cdot \frac{y_{Iob}}{y_{Il}} \quad (13)$$

ist. Gl. (12) stellt die Rektifikationslinien dar, die innerhalb eines gegebenen Rektifikationsdreiecks sich nur durch den Wert der Konstanten  $K$  unterscheiden. Durch einen vorgegebenen Punkt ist die Konstante  $K$  festgelegt.

Die Lösung stimmt in ihrem Aufbau mit der schon früher bekannten Lösung für die geschlossene Rektifikation überein [2], bei der der Säule nichts entnommen und auch nichts zugeführt wird, und daher auch  $F = D$  ist. Die Gleichung der geschlossenen Rektifikation läßt sich auch aus der allgemeinen Lösung (12) herleiten. Hierbei fallen Rektifikationsdreieck und Gehaltsdreieck zusammen. Den schon früher für die geschlossene Rektifikation bekannten Exponenten erhält man wie folgt. Mit Hilfe von Gl. (9) drückt man den Exponenten  $n$  in Gl. (12) durch die Lösungen von  $E$  aus, was zu der Beziehung führt

$$n = \frac{E_r - E_l}{E_r - E_{ob}}. \quad (14)$$

Berechnet man die Werte von  $E$  aus den Koordinaten

der Eckpunkte des Gehaltsdreiecks

$$x_{Ii} = x_{IIi} = 0; \quad x_{Ir} = 1; \quad x_{IIr} = 0; \quad x_{Iob} = 0; \\ x_{IIob} = 1,$$

und setzt man diese Werte in Gl. (14) ein, so ergibt sich der Exponent der geschlossenen Rektifikation zu

$$n_g = \frac{\epsilon_I - 1}{\epsilon_I - \epsilon_{II}}, \quad (15)$$

was mit dem schon früher hierfür gefundenen Ausdruck übereinstimmt.

*Lösung der Differentialgleichung für den Fall, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Flüssigkeitsseite liegt.*

Die Annahme, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Flüssigkeitsseite liegt, bedeutet, daß nur der Konzentrationsunterschied in der Flüssigkeit als treibende Kraft des Stoffaustausches angesehen wird, während im Dampf kein solches Konzentrationsgefälle besteht. Die ausgetauschte Menge ist dann proportional dem Konzentrationsunterschied in der Flüssigkeit, so daß wir setzen können

$$\Delta x_I = \text{const} (x_I^* - x_I) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \Delta x_{II} = \text{const} (x_{II}^* - x_{II}) \end{array} \right\} \quad (16)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Konstanten in beiden Gleichungen denselben Wert haben, ergibt sich nach Division und Übergang zu kleinen Änderungen die Differentialgleichung

$$\frac{dx_{II}}{dx_I} = \frac{x_{II}^* - x_{II}}{x_I^* - x_I}, \quad (17)$$

die sich durch Einführen der Beziehungen (2) für das Gleichgewicht und der Mengenbilanzen in die Form bringen läßt

$$\frac{dy_{II}}{dy_I} = \frac{\frac{1}{\epsilon_{II}} y_{II} - \left[ a_{II}'' + \frac{D}{F} y_{II} \right] \left[ 1 + \left( \frac{1}{\epsilon_I} - 1 \right) y_I + \left( \frac{1}{\epsilon_{II}} - 1 \right) y_{II} \right]}{\frac{1}{\epsilon_I} y_I - \left[ a_I'' + \frac{D}{F} y_I \right] \left[ 1 + \left( \frac{1}{\epsilon_I} - 1 \right) y_I + \left( \frac{1}{\epsilon_{II}} - 1 \right) y_{II} \right]} \quad (18)$$

Diese Differentialgleichung stimmt in ihrer Bauart vollkommen mit Gl. (6) überein. Die Abweichung besteht einzig und allein darin, daß  $x_I$ ,  $x_{II}$  und  $F/D$  durch  $y_I$ ,  $y_{II}$  und  $D/F$ ,

$$a_I = y_{I0} + \frac{F}{D} x_{I0} \quad \text{durch} \quad a_I'' = x_{I0} - \frac{D}{F} y_{I0}$$

und

$$a_{II} = y_{II0} - \frac{F}{D} x_{II0} \quad \text{durch} \quad a_{II}'' = x_{II0} - \frac{D}{F} y_{II0}$$

ersetzt sind. Aus diesem Grunde ist hier der gleiche Lösungsweg, den HAUSEN zeigte, gangbar. Der Unterschied besteht nur darin, daß HAUSEN die Lösung zunächst für den Verlauf der Zusammensetzungsänderung der Flüssigkeit fand, während sich hier als erstes die Zusammensetzungsänderung des Dampfes ergibt.

Zur Lösung führt man neue Veränderliche

$$\left. \begin{array}{l} \eta_I'' = y_I - y_{Il} \\ \eta_{II}'' = y_{II} - y_{IIl} \end{array} \right\} \quad (19)$$



ein. Bestimmt man hierbei  $y_{II}$  und  $y_{III}$  so, daß die konstanten Glieder in Zähler und Nenner der Differentialgleichung gleich null werden, so ergeben sich für  $y_{II}$  und  $y_{III}$  die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} y_{II} &= \frac{a''_I}{\frac{1}{\varepsilon_I E''_I} - \frac{D}{F}} \\ y_{III} &= \frac{a''_{II}}{\frac{1}{\varepsilon_{II} E''_{II}} - \frac{D}{F}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

worin  $E''_I$  die Abkürzung

$$E''_I = 1 + \left( \frac{1}{\varepsilon_I} - 1 \right) y_{II} + \left( \frac{1}{\varepsilon_{II}} - 1 \right) y_{III} \quad (21)$$

darstellt. Für  $E''$  läßt sich auch hier eine Gleichung dritten Grades ableiten, aus deren Lösungen sich jeweils drei Punkte im Gehaltsdreieck für Dampf und

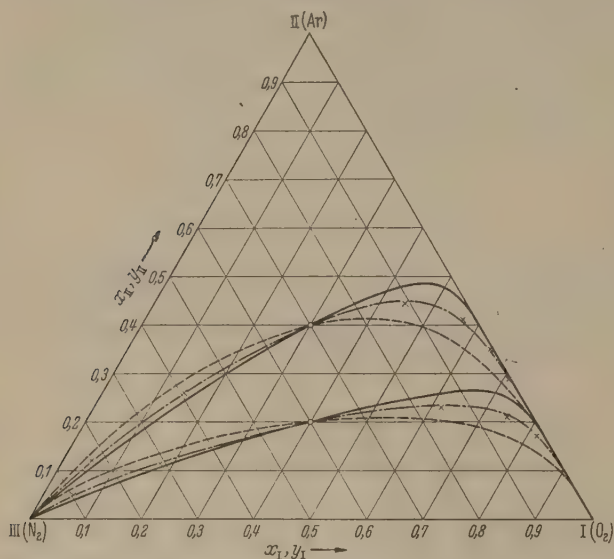


Abb. 3. Geschlossene Rektifikation, Vergleich der Rektifikationslinien für die verschiedenen Annahmen über den Stoffaustausch. — Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Dampfseite; — — — Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Flüssigkeitsseite; — — — Verlauf der Rektifikation bei  $n_{geom} = \sqrt{n \cdot n''}$ ; x x theoretische Böden.

Flüssigkeit ergeben. Diese Punkte sind mit den bei der Darstellung der Arbeit von HAUSEN schon beschriebenen Eckpunkten der Rektifikationsdreiecke identisch. Dieses Ergebnis ist völlig einleuchtend, wenn man bedenkt, daß sich die Eckpunkte, wie schon beschrieben, allein aus der Mengenbilanz und der Gleichgewichtsbeziehung ergeben, die beide keine Annahmen über die Art des Stoffaustausches enthalten. Wie sich zeigen läßt, sind auch die Rektifikationsscheidelinien für beide Annahmen über den Stoffaustausch gleich. Denn wenn man für die Rektifikationsscheidelinie des Dampfes für den Fall, daß der Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Flüssigkeitsseite liegt, den Ansatz

$$y_{II} = \left( \frac{dy_{II}}{dy_I} \right) (y_I - \bar{y}_I^*) \quad (22)$$

macht, dann ergibt sich nach Einsetzen von  $\left( \frac{dy_{II}}{dy_I} \right)$  aus Gl. (18) in Gl. (22) und einigen Umformungen ebenfalls die Gl. (3).  $a''_I$  und  $a''_{II}$  werden dabei aus den Koordinaten des Schnittpunktes der Rektifikationsscheidelinie mit der Grundlinie des Gehaltsdreiecks berechnet.

Entsprechendes gilt für die Rektifikationsscheidelinie der Flüssigkeit. Da die Rektifikationsscheidelinien die Seiten der Rektifikationsdreiecke darstellen, ergeben sich somit auch die Rektifikationsdreiecke unabhängig von einer Annahme über die Lage des Stoffaustauschwiderstandes.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung erscheint zunächst ziemlich verwickelt. Man kann sie in derselben Weise umformen wie in dem ersten Grenzfall, in dem der Widerstand allein auf der Dampfseite angenommen war [1]. Man erhält die Lösung in sehr einfacher Form, wenn man Koordinaten  $\xi_I$  und  $\xi_{II}$  einführt, deren Nullpunkt im linken Eckpunkt des Rektifikationsdreiecks liegt, und deren Richtungen mit der unteren bzw. der linken Seite des Rektifikationsdreiecks zusammenfallen. Die Koordinatenwerte sind so zu wählen, daß im rechten Eckpunkt  $\xi_I = 1$  und im oberen Eckpunkt  $\xi_{II} = 1$  ist. Die endgültige Lösung lautet dann

$$\frac{1 - \xi_I - \xi_{II}}{\xi_I} = K'' \left( \frac{\xi_{II}}{\xi_I} \right)^{n''} \quad (23)$$

worin

$$n'' = \frac{y_{II} - y_{III}}{y_I - y_{III}} \cdot \frac{x_{Iob}}{x_{II}} \quad (24)$$

bedeutet. Die Konstante  $K''$  ist durch einen vorgegebenen Punkt der Rektifikationslinie festgelegt. Der Exponent  $n''$  läßt sich auch hier durch  $E$  ausdrücken

$$n'' = \frac{E_r - E_l}{E_r - E_{ob}} \cdot \frac{E_{ob}}{E_l} \quad (25)$$

Die Exponenten  $n$  und  $n''$ , die sich für die beiden Annahmen über den Stoffaustausch ergeben, stehen nach Gl. (14) und (25) im Verhältnis

$$\frac{n''}{n} = \frac{E_{ob}}{E_l} \quad (26)$$

d. h. die Exponenten verhalten sich wie die Werte von  $E$  des oberen und linken Eckpunktes des Rektifikationsdreiecks.

Für die geschlossene Rektifikation läßt sich der Exponent  $n_g$  mit Gl. (26) leicht aus  $n_g$  nach Gl. (15) oder auch unmittelbar aus Gl. (25) berechnen, wenn man die erforderlichen Werte von  $E$  aus den Koordinaten der Eckpunkte des Gehaltsdreiecks ermittelt. Man erhält

$$n_g = \varepsilon_{II} \frac{\varepsilon_I - 1}{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}} \quad (27)$$

#### Anwendungsbeispiele.

Den Verlauf der Rektifikationslinien bei der geschlossenen Rektifikation, d. h. beim Rücklaufverhältnis  $v = \infty$ , zeigt Abb. 3. Um den Einfluß der Annahmen über den Stoffaustausch deutlich zu machen, wurden für zwei als vorgegeben betrachtete Zusammensetzungen die Rektifikationslinien gezeichnet. Zwei kleine Kreise kennzeichnen die vorgegebenen Punkte. Die ausgezogenen Linien entsprechen dem Fall, daß der Widerstand allein auf der Dampfseite, die gestrichelten dem Fall, daß der Widerstand allein auf der Flüssigkeitsseite liegt. Als Beispiel wurde das als ideal betrachtete Sauerstoff-Stickstoff-Argon-Gemisch bei einem Gesamtdruck von 1 ata gewählt, für das angenähert  $\varepsilon_I = 0,246$  und  $\varepsilon_{II} = 0,330$  gesetzt werden kann. Die Exponenten  $n_g$  und  $n''_g$  sind mit Hilfe der Gl. (15) bzw. (27) berechnet. Die Konstanten  $K$  und



$K''$  erhält man für beide Fälle, wenn man in Gl. (12) bzw. (23) die Koordinaten  $\xi_{I0} = x_{I0}$  und  $\xi_{II0} = x_{II0}$  des vorgegebenen Punktes einsetzt. Beliebige viele Punkte zum Zeichnen der Rektifikationslinie liefert eine graphische Darstellung der Gl. (12) bzw. (23) im doppelt logarithmischen Maßstab. Wählt man nämlich  $\frac{\xi_{II}}{\xi_I}$  als Abszisse und  $\frac{1 - \xi_I - \xi_{II}}{\xi_I}$  als Ordinate, so stellen Gl. (12) bzw. (23) im logarithmischen Diagramm Geraden dar.

Bemerkenswert an den so gefundenen Linien ist, daß sich bei Annahme des Stoffaustauschwiderstandes auf der Dampfseite größere Argonanreicherungen ergeben. Nach der bekannten von Boden zu Boden fortschreitenden Berechnungsweise, die für jeden theoretischen Boden einen Punkt liefert, erhält man die durch Kreuze dargestellte Punktreihe. Bildet man ferner aus den beiden Exponenten  $n_g$  und  $n''_g$ , die sich bei beiden Annahmen über den Stoffaustausch ergeben, das geometrische Mittel, und zeichnet auch mit diesem Mittelwert die Rektifikationslinien nach Gl. (23), so bekommt man die gezeichneten, strichpunktierten Linien. Aus der Abb. ist ersichtlich, daß der Verlauf der Rektifikation bei theoretischen Böden gut durch Gl. (23) mit dem geometrischen Mittel der Exponenten beschrieben wird.

Als Beispiel für die offene Rektifikation soll die Rektifikation eines Sauerstoff-Stickstoff-Argon-Gemisches im oberen Teil der oberen Säule eines Zweisäulenapparates für die Luftzerlegung behandelt werden. Bezogen auf je 100 Nm<sup>3</sup> Luft, die in der Drucksäule vorzerlegt werden, sollen am oberen Ende der oberen Säule 46,2 Nm<sup>3</sup> Flüssigkeit mit 1% O<sub>2</sub> und 0,34% Ar aufgegeben werden. An derselben Stelle sollen 79,78 Nm<sup>3</sup> Dampf mit 1% O<sub>2</sub> und 1,04% Ar austreten. Durch diese Angaben sind der durch einen kleinen Kreis in Abb. 4 gekennzeichnete Punkt im Gehaltsdreieck und das zugehörige  $F/D$  gegeben. Grundsätzlich ist man damit in der Lage mit Gl. (11) die drei Lösungen von  $E$  zu bestimmen. Zahlenmäßig bereitet dies jedoch einige Schwierigkeiten, weil es sich um eine Gleichung dritten Grades handelt. Zu einem einfachen Lösungsweg gelangt man, wenn man zunächst mit der für  $a_{II} = 0$  sich ergebenden Gleichung

$$E_{I0} = \left\{ \frac{D}{2F} \left[ \epsilon_I + \frac{F}{D} - a_I(\epsilon_I - 1) \right] + \sqrt{\left[ \frac{D}{2F} \left[ \epsilon_I + \frac{F}{D} - a_I(\epsilon_I - 1) \right] \right]^2 - \frac{D}{F} \epsilon_I} \right\} \quad (28)$$

eine Näherungslösung für  $E_I$  berechnet. Dieser Wert von  $E_I$  läßt sich durch wiederholte Anwendung des Näherungsverfahrens von NEWTON beliebig verbessern. Die beiden weiteren Lösungen  $E_{ob}$  und  $E_r$  berechnet man mit der Beziehung

$$E_{ob,r} = -\frac{a_1 + E_I}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{a_1 + E_I}{2} \right)^2 + \frac{a_3}{E_I}} \quad (29)$$

Dabei gilt das positive Vorzeichen für den oberen Eckpunkt und das negative Vorzeichen für den rechten Eckpunkt. Aus den so gefundenen Werten von  $E$  wurden beim vorliegenden Beispiel mit den Gl. (14) und (25) die Exponenten  $n$ ,  $n''$  und  $n_{geom} = \sqrt{n \cdot n''}$  berechnet. Die Gl. (9) lieferten die Koordinaten der Eckpunkte des Rektifikationsdreiecks der Flüssigkeit und die Gleichgewichtsbeziehungen (1) die entspre-

chenden Eckpunkte des Rektifikationsdreiecks des Dampfes. Die Konstanten  $K$  und  $K''$  wurden auch hier durch Anwendung von Gl. (12) und (23) auf den vorgegebenen Punkt ermittelt. Die Koordinaten  $\xi_{I0}$  und  $\xi_{II0}$  dieses Punktes lassen sich am leichtesten durch Ausmessen im Rektifikationsdreieck bestimmen. Beim Ausmessen ist zu beachten, daß, wie schon erwähnt, die Koordinaten  $\xi_I$  und  $\xi_{II}$  in Richtung der Seiten des Rektifikationsdreiecks zählen und daß im rechten Eckpunkt  $\xi_I = 1$  und im oberen Eckpunkt  $\xi_{II} = 1$  ist. Die für die Aufzeichnung der Rektifikationslinien erforderlichen Zwischenpunkte erhält man auch hier aus der Darstellung der Gl. (12) oder (23) im doppelt logarithmischen Maßstab.

In Abb. 4 sind die Rektifikationslinien des oberen Abschnittes der oberen Säule für die zwei verschiedenen Annahmen über den Stoffaustausch dargestellt. Wie bei der geschlossenen Rektifikation so sind überdies die Rektifikationslinien für das geometrische Mittel

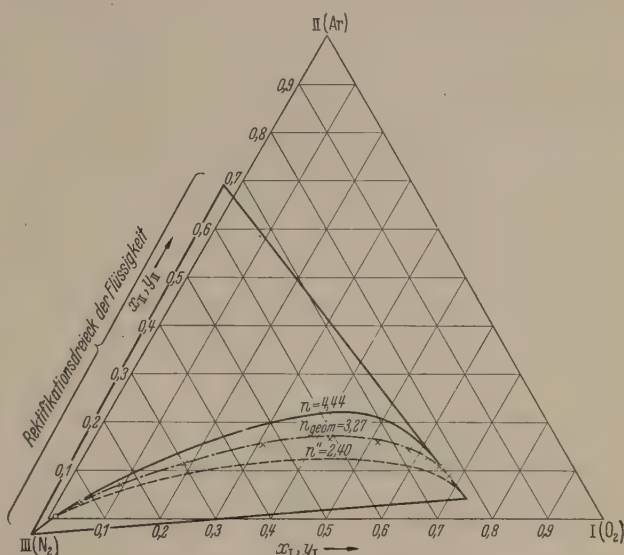


Abb. 4. Rektifikation von idealen Dreistoffgemischen bei verschiedenen Annahmen über den Stoffaustausch. — — — Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Dampfseite; — — — Widerstand des Stoffaustausches allein auf der Flüssigkeitsseite; — — — Verlauf der Rektifikation bei  $n_{geom} = \sqrt{n \cdot n''}$ ;  $\times \times$  theoretische Böden.

der Exponenten  $n$  und  $n''$  und die Punktreihe, wie sie sich bei der bekannten von Boden zu Boden fortschreitenden Berechnungsmethode für theoretische Böden ergibt, eingezeichnet, die wiederum gut übereinstimmen. Man sieht auch hier sehr deutlich, wie stark die Annahme über den Widerstand des Stoffaustausches den Verlauf der Rektifikationslinien beeinflusst, und wie wichtig es daher ist, die tatsächliche Aufteilung dieses Widerstandes auf Flüssigkeit und Dampf durch weitere Forschungsarbeiten zu ergründen<sup>1</sup>.

#### Zusammenfassung.

Die vorstehende Untersuchung bringt eine Ergänzung zur Theorie der Rektifikation idealer Dreistoffgemische.

Entgegen dem schon früher behandelten Fall, bei dem der Widerstand des Stoffaustausches allein auf

<sup>1</sup> Einen wichtigen Schritt in dieser Richtung bedeutet die an der Technischen Hochschule Hannover eingereichte Dissertation von E. EDYE über die „Rektifizierung niedriger Füllkörperschichten“. Diese Arbeit soll demnächst veröffentlicht werden.



der Dampfseite angenommen wurde, wird nunmehr vorausgesetzt, daß der Stoffaustauschwiderstand allein auf der Flüssigkeitsseite liegt. Bei beiden Annahmen ergeben sich identische Rektifikationscheidelinien, Hüllkurven und Rektifikationsdreiecke. Die Differentialgleichungen sind in beiden Fällen gleich gebaut. Ihre Lösungen, die die Rektifikationslinien darstellen, unterscheiden sich nur durch einen Exponenten  $n$  bzw.  $n''$ . Wenn der Stoffaustauschwiderstand ausschließlich auf der Flüssigkeitsseite liegt, ist der Exponent kleiner als im entgegengesetzten Fall. Dies bedeutet für den Verlauf der Rektifikation eine geringere Anreicherung an demjenigen Bestandteil, dessen Siedepunkt zwischen den Siedepunkten der beiden anderen

Bestandteile liegt. Für das Verhältnis der Exponenten bei den verschiedenen Annahmen über den Stoffaustausch ergibt sich eine einfache Beziehung. Der Verlauf der Rektifikation, wie er sich in bekannter Weise schrittweise unter Annahme theoretischer Böden errechnet, läßt sich mit Hilfe der gefundenen Lösung nach Gl. (23) ebenfalls zahlenmäßig gut wiedergeben, wenn man als Exponenten das geometrische Mittel aus  $n$  und  $n''$  benutzt.

**Literatur.** [1] HAUSEN, H.: Z. f. angew. Phys. 4, 41 (1952).  
— [2] HAUSEN, H.: Forschung 6, 9 (1935).

ERNST A. RISCHE.  
Institut für Thermodynamik und Dampfkesselwesen  
der Techn. Hochschule Hannover.

## Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers zwischen 0° und 40° C\*.

Von WOLF WEBER.

(Eingegangen am 10. Juli 1954.)

### 1. Einleitung.

Im Rahmen einer Arbeit über die Festlegung einer Viskositätsskala, die auf der absoluten Viskosität des Wassers bei 20° C beruht, wurden auch Messungen der Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers zwischen 0° und 40° C ausgeführt. Eine Veröffentlichung dieser Meßergebnisse war ursprünglich nicht geplant, sie mag aber jetzt nützlich sein, nachdem durch das Erscheinen einer Arbeit von KAMPMEYER [1] die schon bestehende Unsicherheit hinsichtlich der genauen Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers nur vergrößert worden ist. KAMPMEYER stellte unter Benutzung zuverlässig erscheinender Meßwerte eine Ausgleichsformel für die Temperaturabhängigkeit der Wasserviskosität auf, die zwar im Bereich von 20° bis 60° recht gute Werte liefert, nach 0° zu aber falsch wird und auch zwischen 60° und 100° zu unrichtigen Werten führt. An Hand eigener Meßwerte und solcher neuerer fremder Autoren wird versucht, im Bereich von 0° bis 40° C sicher erscheinende Zahlenwerte anzugeben.

### 2. Durchführung der eigenen Versuche.

Zu den Messungen wurde ein Viskosimeter nach Art des Freiflußviskosimeters von UMSTÄTTER [2] benutzt. Bei einer Kapillarlänge von 40 cm und einem Volumen zwischen den Meßmarken von 9,5 ml betrug die Ausflußzeit von Wasser bei 20° C etwa 390 sec. Die HAGENBACH-Korrektur ist klein und erreicht bei 20° nur 0,25%. Größte Sorgfalt wurde auf eine einwandfreie Temperierung des Viskosimeters gelegt. Die beste Temperaturkonstanz wurde auf folgende Weise erzielt. Mit einem Hilfsthermostaten wurde temperierte Kühlflüssigkeit durch die Kühlschlange des Hauptthermostaten (HÖPPLER-Thermostat 12 l) gepumpt. Der so erzielten konstanten Kühlung wurde eine konstante Heizung mit Batteriestrom gegengeschaltet und diese so einreguliert, daß die Temperatur im Badmantel des Viskosimeters sich nicht änderte. Es ließ sich über längere Zeiten eine auf weniger als  $\pm 0,01^\circ \text{C}$  konstante Temperatur einstellen, bei Re-

gelung des Hauptthermostaten durch ein Kontaktthermometer gelang es bei der Anordnung nicht, die Schwankungen unter  $\pm 0,02^\circ$  herunterzudrücken. Für Temperaturen unterhalb 20° wurde der Hilfsthermostat durch eine Solekühlmaschine gekühlt, bei 0° wurde Spiritus als Badflüssigkeit genommen. Die Zeitmessung erfolgte mit Synchronuhren, die an eine Normalfrequenz von 50 Hz angeschlossen waren.

Sämtliche Messungen wurden als Relativmessungen gegen 20° ausgeführt, d. h. zu Beginn jeder Meßreihe wurde die Viskosität bei 20° nachgeprüft und die übrigen Werte darauf bezogen. Die angegebenen Zahlenwerte sind Mittelwerte aus fünf unabhängigen Meßreihen mit zwei verschiedenen Beobachtern. Jeder Punkt ist das Mittel aus mindestens zwanzig Einzelwerten. Außer den Messungen mit dem Freiflußviskosimeter sind auch Versuche mit UBBELOHDE-Kapillaren durchgeführt worden. Bei den Ergebnissen dieser Versuche ist als Endwert stets das Mittel aus den Meßwerten mit vier verschiedenen Geräten (je zwei der Größe 0a und I) mitgeteilt. Die HAGENBACH-Korrektur war vorher für jedes Viskosimeter gesondert ermittelt worden. [Die aus den Versuchen unmittelbar gewonnene kinematische Viskosität wurde auf dynamische Viskosität umgerechnet.]

### 3. Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers.

In der folgenden Tabelle 1 sind alle dem Verfasser bekannt gewordenen neueren Messungen der Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers zwischen 0° und 40°, und zwar des einfacheren Vergleiches wegen als Relativwerte zur Viskosität bei 20° C aufgeführt<sup>1</sup>. Bei den eigenen Messungen sind die Ergebnisse mit dem Freiflußviskosimeter (UMSTÄTTER) und den UBBELOHDE-Viskosimetern gesondert gekennzeichnet.

Im Temperaturbereich von 20° bis 40° C ist die Übereinstimmung der neueren Meßwerte recht gut, vor allem die Punkte 25° und 40° erscheinen weitgehend gesichert. Zwischen 0° und 20° liegen seit den

\* Amtliche Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt.

<sup>1</sup> Die in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit von HÖPPLER [11] „Über neuere Messungen der Zähigkeit des Wassers“ behandelt nur den Viskositätswert bei 20° C.



Tabelle 1. Relativwerte der Viskosität des Wassers  $\eta/\eta_{20}$  im Bereich von 0° bis 40° C. Experimentelle Werte.

Temp. °C	1911 [3] BINGHAM & WHITE	1933 [4] GEDDES	1942 [5] SWINDELLS	1944 [5] COE & GODFREY	1949 [6] HARDY & COTTINGTON	1952 PTB	
						UMST.	UBBEL.
0	1,7864					1,7897	1,7896
5	1,5159				1,5154	1,5178	1,5185
10	1,2932					1,3044	1,3045
15	1,1312					1,1360	1,1351
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	0,8892	0,8885	0,8885	0,8885		0,8885	
30	0,7948	0,7947		0,7960		0,7959	
35	0,7184					0,7175	
40	0,6522	0,6519	0,6513	0,6518	0,6518	0,6517	

Messungen von BINGHAM und WHITE anscheinend keine Neubestimmungen vor, mit Ausnahme eines Wertes von HARDY und COTTINGTON bei 5°. Die eigenen Meßwerte bei 0° und 5° sind etwas höher als die der anderen Autoren. Die Differenzen übersteigen nicht sehr wesentlich die Meßunsicherheit; sie werden aber durch die zusammenfassenden Bearbeitungen (Ausgleich) vergrößert, von denen die wichtigsten in der Tabelle 2 zusammengestellt und wieder den eigenen Meßwerten gegenübergestellt sind.

Tabelle 2. Relativwerte der Viskosität des Wassers  $\eta/\eta_{20}$  im Bereich von 0° bis 40° C, nach Ausgleichverfahren verschiedener Verfasser.

Temp. °C	1917 [7] BINGHAM & JACKSON		1929 [8] DORSEY	1943 [5] CRAGOE	1952 [1] KAMPMEYER	1952 PTB experim.
	Mittelwerte	Ausgleichsformel				
0	1,7805	1,7832	1,7783	1,7829	1,7668	1,7897
5	1,5086	1,5112	1,5057	1,5140	1,5079	1,5178
10	1,3001	1,3012	1,2984	1,3035	1,3014	1,3044
15	1,1354	1,1347	1,1348	1,1358	1,1353	1,1360
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	0,8900	0,8893	0,8872	0,8885	0,8886	0,8885
30	0,7982	0,7967	0,7935	0,7959	0,7958	0,7959
35	0,7172	0,7189	0,7146	0,7179	0,7177	0,7175
40	0,6503	0,6527	0,6480	0,6518	0,6514	0,6517

Ein Vergleich der gemittelten Werte von BINGHAM und JACKSON (Tab. 2) mit den experimentellen Werten von BINGHAM und WHITE (Tab. 1) zeigt, daß nach der Mittelbildung die Viskositätswerte für 0° und 5° C um 0,3 bzw. 0,5% niedriger angegeben werden. Der Grund hierfür liegt in der Berücksichtigung der Meßwerte älterer Autoren, die bei 0° C durchweg tiefer liegen. Die Viskositätsangaben bei 0° und 5° C, wie man sie nach der Ausgleichformel von BINGHAM und JACKSON erhält, liegen etwas höher als die der Mittelbildung. BINGHAM und JACKSONS Zahlenangaben (Ausgleichsformel) galten bis in die neueste Zeit als Standard für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers. DORSEYS Zusammenstellung in den Critical Tables erscheint wenig zuverlässig. Die sehr niedrigen Relativwerte zwischen 0° und 20° sind durch seinen hohen 20°-Wert bedingt ( $\eta_{20} = 1,0087$  cP), aber auch bei höheren Temperaturen sind seine Werte durchweg schlechter als die von BINGHAM und JACKSON. Die erste der neueren Zusammenfassungen, d. i. die von CRAGOE, beruht auf Messungen des National Bureau of Standards und stimmt mit den eigenen Meßwerten, abgesehen von den Punkten bei 0° und 5° mit einer mittleren Abweichung von weniger als  $\pm 0,1\%$  über-

ein. Die von KAMPMEYER angegebenen Werte decken sich zwischen 20° und 40° recht gut mit den eigenen Meßwerten, nicht jedoch zwischen 0° und 20°. In diesem Bereich liegen seine Angaben systematisch tiefer und erreichen bei 0° eine, die Meßunsicherheit weit übersteigende Abweichung von 1,3%. Bedingt ist diese Differenz durch die Bewertung der dem Ausgleich zugrunde liegenden Meßpunkte. KAMPMEYER schenkt den Meßwerten von BINGHAM und WHITE bei 5° und 0° wenig Vertrauen, weil die älteren Autoren durchweg niedrigere Werte finden und gelangt dadurch zu den sehr tiefen Viskositätswerten. Der Meßwert von HARDY und COTTINGTON bei 5° ist KAMPMEYER nicht bekannt gewesen. Mit den Meßwerten von HARDY und COTTINGTON zwischen 60° und 100° läßt sich übrigens zeigen, daß in diesem Temperaturbereich die Ausgleichformel von KAMPMEYER zu hohe Werte liefert.

4. Darstellung der Meßwerte durch Interpolationsformeln und Angabe der wahrscheinlichsten Werte für die Viskosität des Wassers zwischen 0° und 40° C.

Es wurde versucht, die eigenen Meßwerte durch eine Interpolationsformel darzustellen. Aus einer Reihe von Interpolationsformeln, z. B. die von BINGHAM, HARDY und COTTINGTON, CRAGOE, VOGEL und UMSTÄTTER erwies sich die von CRAGOE [5] angegebene Gleichung

$$\log \frac{\eta_t}{\eta_{20}} = \frac{a(20-t) - b(20-t)^2}{t+c}$$

(t Temperatur in °C)

als diejenige, mit der sich die Meßwerte mit der geringsten Streuung darstellen lassen. Die Näherungskurve wurde durch je drei Meßpunkte gelegt; sie geht außerdem durch den Bezugspunkt 20° hindurch.

In der Tabelle 3 sind die Relativwerte, die aus den Ausgleichskurven berechnet wurden, zusammengestellt. Die drei Meßpunkte, aus denen die Konstanten der Näherungsgleichungen jeweils ermittelt wurden, sind unterstrichen.

Tabelle 3. Darstellung der Viskosität des Wassers mit den Ausgleichsformeln von CRAGOE und HARDY u. COTTINGTON.

Temp. °C	CRAGOE	HARDY u. COTTINGTON		PTB	
		HA u. Co Formel	CRAGOE Formel	CRAGOE Formel durch	
				0°, 15°, 40°	10°, 25°, 40°
0	1,7829	1,7833	1,7857	1,7897	1,7894
5	1,5140	1,5154	1,5154	1,5167	1,5166
10	1,3035	1,3045	1,3041	1,3045	1,3044
15	1,1358	1,1362	1,1360	1,1360	1,1360
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	0,8885	0,8881	0,8885	0,8885	0,8885
30	0,7959	0,7954	0,7959	0,7959	0,7959
35	0,7179	0,7176	0,7179	0,7179	0,7179
40	0,6518	0,6518	0,6518	0,6517	0,6517

Legt man die Gleichung von CRAGOE durch die Meßpunkte von HARDY und COTTINGTON, so stimmen diese Ausgleichwerte gut mit den eigenen Meßwerten bei Temperaturen von 10° bis 40° überein (Abweichungen kleiner als  $\pm 0,05\%$ ). Ebenfalls führen die Angaben von CRAGOE, die auf Messungen des NBS beruhen, praktisch in dem Bereich zu den gleichen Zahlenwerten, vgl. Tabelle 3. Der eigene Meßwert bei 35° scheint etwas zu niedrig zu liegen. Die Versuche bei 0° und 5° ergeben höhere Viskositätswerte, als es



bisher angenommen wurde. Mit der Formel von CRAIG war es nicht möglich, beide Meßpunkte darzustellen. Wurde die Kurve durch 0° gelegt, lag der 5° Punkt zu tief, wurde sie dagegen durch 5° gelegt, fiel der 0° Punkt noch höher. Es erscheint nicht unmöglich, daß die Kurve für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers in der Nähe von 5° eine kleine Unstetigkeit hat.

In Tabelle 4 sind die vom Verfasser als wahrscheinlich gehaltenen Viskositätswerte des Wassers angegeben, einmal als Relativwerte, und dann als Absolutwerte, bezogen auf den neuen Basiswert der Viskosität des Wassers bei 20°C, der von SWINDELLS, COE und GODFREY [9] zu  $\eta = 1,002$  cPoise ermittelt wurde.

Tabelle 4. Wahrscheinlichste Werte der Viskosität des Wassers zwischen 0° und 40° C.

Temperatur °C	Viskositätsverhältnis $\frac{\eta_t}{\eta_{20}}$	dynamische Viskosität cP	kinematische Viskosität cSt
0	1,7885	1,792	1,792
5	1,5170	1,520	1,520
10	1,3043	1,3069	1,3073
15	1,1360	1,1383	1,1393
20	1,0000	1,0020	1,0038
25	0,8885	0,8903	0,8929
30	0,7959	0,7975	0,8010
35	0,7179	0,7193	0,7236
40	0,6518	0,6531	0,6582

Die Unsicherheit der Zahlenangaben zwischen 20° und 40°C dürfte  $\pm 0,05\%$  nicht übersteigen. Für die eigenen Meßwerte mit dem Freifluß-Viskosimeter zwischen 0° und 20° ergeben sich für die Standardabweichung  $\sigma$  (mittlerer quadratischer Fehler) bei 15°, 10° und 5°  $\pm 0,03\%$ , bei 0°  $\pm 0,05\%$ . Der Wiederhol-Streubereich<sup>1</sup>  $3\sigma$  liegt also in der Größenordnung von  $\pm 0,1\%$ . Für die UBBELOHDE-Viskosimeter ist die Unsicherheit infolge der Größe der HAGENBACH-Korrektur etwa doppelt so groß anzusetzen. Die Mittelwerte der Viskosität, erhalten mit den beiden Viskosimetertypen, unterscheiden sich aber durchweg um weniger als 0,1%.

##### 5. Einfluß des Luftgehaltes auf die Viskosität von Wasser.

TINDAL und MASON [10] glauben einen bedeutenden Einfluß des Luftgehaltes (besonders des Sauerstoffgehaltes) auf die Viskosität von Wasser nachgewiesen zu haben. Danach soll die Viskosität des Wassers bei 4° um 0,5% je Milliontel O<sub>2</sub>-Gehalt ansteigen, bei 25° für einen Sauerstoffgehalt über 5 Milliontel sogar bis 6% je Milliontel Zunahme O<sub>2</sub>. Zur Nachprüfung dieser Angaben wurde eine Reihe von Versuchen durchgeführt. Einmal wurde doppelt destilliertes

Wasser, das zuerst am Zeitpunkt der Messung mit Luft in Berührung gekommen war, gemessen, dann wurde ein Teil des gleichen Destillates an Luft offen stehengelassen und nach verschiedenen Tagen, im Höchstfalle 7 Tagen, untersucht. Durch andere Proben wurde mehrere Stunden lang verdampfende flüssige Luft mit hohem Sauerstoffgehalt durchgeleitet. Die Messungen wurden in zwei UBBELOHDE-Kapillaren durchgeführt. Die Durchflußzeit von Wasser bei 20° der ersten Kapillare war in einer großen Zahl von Einzelbestimmungen während mehrerer Jahre zu  $201,22 \pm 0,1$  sec gefunden worden. Sämtliche 12 Meßreihen mit verschiedenen Graden der Belüftung des Wassers (darunter drei Versuche mit praktisch luftfreiem, frisch destilliertem Wasser) ergaben Mittelwerte zwischen 201,12 und 201,22 sec. Die zweite Kapillare, deren Laufzeit für Wasser  $202,06 \pm 0,1$  sec betrug, ergab bei den gleichen Versuchen Mittelwerte zwischen 202,00 und 202,15 sec. Die Proben, die mit Luft nicht in Berührung waren, zeigten Meßwerte, die an der unteren Grenze des Streubereiches lagen. Aus den Versuchen läßt sich folgern, daß ein Einfluß der Belüftung des Wassers für die übliche Versuchspraxis (doppelte Destillation des Wassers und anschließende Messung) nicht von Bedeutung ist und normalerweise keine größere Unsicherheit als 0,1% bedingt.

##### 6. Zusammenfassung.

Es wird an Hand eigener Messungen und solcher fremder Autoren gezeigt, daß eine von KAMPMEYER angegebene Ausgleichformel für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers im Temperaturbereich von 0° bis 20° zu falschen Werten führt. Die nach Ansicht des Verfassers zuverlässigsten Werte für die Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Wassers zwischen 0° und 40° werden in einer Tabelle angegeben. Ein von TINDAL und MASON gefundener Einfluß der Belüftung auf die Viskosität des Wassers konnte nicht bestätigt werden; er ist — wenn überhaupt reell — für die normale Versuchspraxis der Viskositätsmessungen mit Wasser bedeutungslos.

**Literatur.** [1] KAMPMEYER, PR. M.: J. appl. Phys. 23, 99 (1952). — [2] UMSTÄTTER, H.: Einführung in die Viskosimetrie und Rheometrie. Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1952 S. 86—88. — [3] BINGHAM, E. C. und G. F. WHITE: Z. phys. Chem. 80, 670 (1912). — [4] GEDDES, J. A.: J. Amer. chem. Soc. 55, 4832 (1933). — [5] COE, J. R. und T. B. GODFREY: J. appl. Phys. 15, 625 (1944). — [6] HARDY, R. C. und R. L. COTTINGTON: J. Res. nat. Bur. Stand. 42, 573 (1949). — [7] BINGHAM, E. C. und R. F. JACKSON: Bull. U.S. Bur. Stand. 14, Nr. 298, 59 (1917). — [8] International Critical Tables. Bd. V. Mac Graw-Hill Book Company Inc. New York 1929 S. 10. — [9] SWINDELLS, J. F., J. R. COE und T. B. GODFREY: J. Res. nat. Bur. Stand. 48, 1 (1952). — [10] TINDAL, C. H. und J. B. MASON: Amer. J. Phys. 19, 382 (1951). — [11] HÖPPLER, F.: Z. angew. Phys. 4, 297 (1952).

Dipl.-Ing. WOLF WEBER  
Physikalisch-Technische Bundesanstalt  
Braunschweig.

<sup>1</sup> Zur Definition der Ausdrücke Standardabweichung und Wiederhol-Streubereich siehe Entwurf DIN 51 849 „Prüffehler und Toleranz“ veröffentlicht in Erdöl und Kohle 6, S. 557 (1953).



Berichte.

Gleichrichter mit *p-i-n*- bzw. mit *p-s-n*-Struktur unter Gleichstrombelastung.

Von ADOLF HERLET und EBERHARD SPENKE.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 15. September 1954.)

I. Einleitung.

Transistoren und Kristallgleichrichter werden häufig nach dem sogenannten Legierungsverfahren [1], [2], [3] hergestellt. Ausgangspunkt sind dabei dünne, einkristalline und hochohmige Halbleiterscheibchen, beispielsweise aus eigenleitendem Germanium. Auf die beiden einander gegenüberliegenden Seiten dieser Scheibchen werden Kontakte aus Elementen der III. und V. Gruppe des periodischen Systems aufgeschmolzen, beispielsweise ein Indium- und ein Antimonkontakt. Dabei bilden sich in der Randzone des Germaniums sehr hoch dotierte Schichten, die mit den Kontaktmetallen abgesättigt sind. Im Gegensatz dazu bleibt die Mittelzone undotiert (s. Abb. 1). Eine derartige Anordnung nennt man eine *p-i-n*-Struktur [4], wobei der Buchstabe *i* die eigenleitende Mittelzone (intrinsic) repräsentiert und den Unterschied gegenüber den SHOCKLEYSchen *p-n*-Gleichrichtern [5] betont, bei denen die beiden dotierten Gebiete unmittelbar, d. h. ohne Zwischenschaltung einer eigenleitenden Mittelzone in einander übergehen (s. Abb. 2). Da es sich nun einerseits häufig gar nicht vermeiden läßt, daß in der Mittelzone doch eine schwache Dotierung vorhanden ist, und da sich andererseits eine solche Dotierung zum mindesten auf das Sperrverhalten auch schon bei kleinen Dotierungskonzentrationen bemerkbar macht, erscheint es uns richtig, zwischen dem Verhalten einer *p-i-n*-Struktur und dem einer „*p-s-n*-Struktur“ zu unterscheiden. Der Buchstabe *s* soll dabei auf die schwache (oder soft) Dotierung der Mittelzone hindeuten.

Wir werden uns im folgenden ersten Teil A dieser Arbeit mit dem *p-i-n*-Gleichrichter beschäftigen, obwohl es sich dabei eigentlich um eine praktisch nicht realisierbare Anordnung handelt. Wie stark aber eine Dotierung der Mittelzone das Sperrverhalten des Gleichrichters beeinflußt, kommt gerade durch die Gegenüberstellung einer *p-i-n*-Struktur und einer *p-s-n*-Struktur zum Ausdruck. Die *p-i-n*-Struktur hat für uns also die Bedeutung eines gedanklich äußerst wertvollen Grenzfalles. Im Teil B folgt dann die Behandlung der *p-s-n*-Struktur.

II. Der stromdurchflossene, nicht neutrale Halbleiter, Skizzierung einer allgemeinen Theorie.<sup>1</sup>

Obwohl wir später bei der tatsächlichen Durchführung einer Theorie der *p-i-n*- und der *p-s-n*-Gleichrichter auf Näherungsmethoden angewiesen sein werden, empfiehlt es sich, zunächst die vollständigen Differentialgleichungen aufzustellen, die das Geschehen in einem stromdurchflossenen und raumladungsbehafteten Halbleiter beherrschen. Im einzelnen handelt es sich dabei um die Zusammensetzung des Gesamtstromes *I* aus dem Diffusions- und dem Feldstrom der Elektronen und aus dem Diffusions- und dem Feldstrom der Defektelektronen (Abschn. 1). Als nächstes folgen die Kontinuitätsgleichungen für den Elektronen- und den Defektelektronenstrom, die die Divergenzen

dieser Ströme mit der Differenz *R* zwischen der Rekombination und der Paarerzeugung in dem Halbleiter verknüpfen (Abschn. 2). Schließlich ist der Zusammenhang zwischen der Divergenz der dielektrischen Verschiebung  $\epsilon \mathcal{E}$  und der Raumladungsdichte  $\rho$  zu besprechen, also die POISSONSche Gleichung (Abschn. 3). In einem Schlußparagrafen wird das gegenseitige Verhältnis dieser Gleichungen und die Zahl der unabhängigen Unbekannten diskutiert (Abschn. 4).

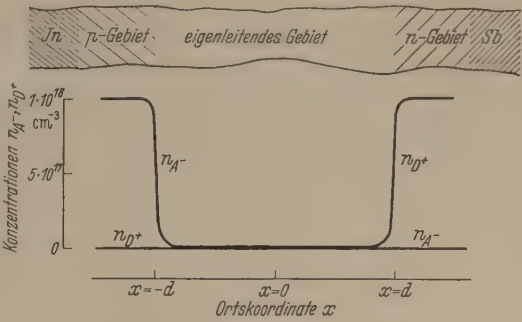


Abb. 1. Verlauf  $n_A(x)$  und  $n_D+(x)$  der Akzeptoren- und Donorkonzentration bei dem von HALL beschriebenen Gleichrichter mit *p-i-n*- bzw. *p-s-n*-Struktur. (Schematisierte Darstellung.  $n_A-$  und  $n_D+$  sind in den hochdotierten Gebieten willkürlich mit  $1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  angenommen worden.)

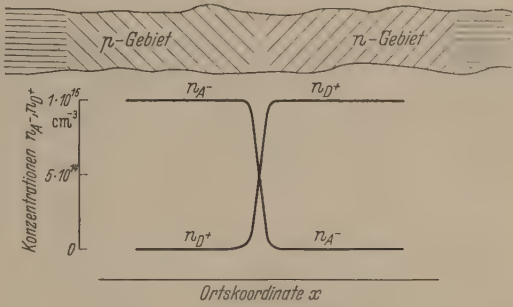


Abb. 2. Verlauf  $n_A(x)$  und  $n_D+(x)$  der Akzeptoren- und Donorkonzentration bei einem SHOCKLEYSchen *p-n*-Gleichrichter (schematisierte Darstellung).

1. Der Gesamtstrom als Summe der Diffusions- und der Feldströme der Elektronen und der Defektelektronen.

Die Dichte *i* des Gesamtstromes setzt sich zunächst einmal aus der Elektronenstromdichte  $i_n$  und der Defektelektronenstromdichte  $i_p$  additiv zusammen. Während aber die Elektronen- und Defektelektronenströme keineswegs divergenzfrei zu sein brauchen und daher im allgemeinen Ortsfunktionen sein werden, muß der Gesamtstrom in einem stationären Fall ortsunabhängig sein, da sich sonst der Ladungszustand irgendwelcher räumlicher Bereiche fortgesetzt und monoton ändern müßte, also nicht stationär wäre. Wir haben demnach zunächst einmal im Falle stationärer Belastung

$$i_n(x) + i_p(x) = i. \tag{1}$$

Wenn wir weiter  $i_n$  und  $i_p$  jeweils als Summe von Dif-

<sup>1</sup> Siehe hierzu auch [5], [6].



fusions- und Feldstromdichte darstellen

$$i_n(x) = i_{n\text{Diff}}(x) + i_{n\text{Feld}}(x) \\ = (-e) \cdot (-D_n n'(x)) + e \mu_n n(x) \cdot \mathcal{E}(x), \quad (2)$$

$$i_p(x) = i_{p\text{Diff}}(x) + i_{p\text{Feld}}(x) \\ = (+e) \cdot (-D_p p'(x)) + e \mu_p p(x) \cdot \mathcal{E}(x) \quad (3)$$

und damit für die ortsunabhängige Gesamtstromdichte  $i$

$$+ e D_n n'(x) + e \mu_n n(x) \cdot \mathcal{E}(x) - e D_p p'(x) + e \mu_p p(x) \cdot \mathcal{E}(x) = i \quad (4)$$

schreiben, so enthalten diese Ansätze die Voraussetzung „quasi thermischer“ Verhältnisse. Die Feldstärke und die Konzentrationsgradienten sollen also so klein sein, daß die entstehenden Driftgeschwindigkeiten  $\mu_n \mathcal{E}(x)$ ,  $D_n \frac{n'(x)}{n(x)}$ ,  $\mu_p \mathcal{E}(x)$  und  $D_p \frac{p'(x)}{p(x)}$  klein gegenüber der mittleren thermischen Geschwindigkeit  $v_{\text{therm}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$  bleiben. Mit  $\mu_n = 3,6 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}^2}{\text{Volt sek}}$  und  $v_{\text{therm}} \approx 10^7 \text{ cm sek}^{-1}$  wären hiernach die Ansätze (2) bis (4) noch bis  $\mathcal{E} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ Volt cm}^{-1}$  zulässig. Tatsächlich haben aber Versuche gezeigt, daß das OHMSche Gesetz

$$i_{n\text{Feld}} = e \mu_n n(x) \cdot \mathcal{E}(x)$$

in Germanium beispielsweise schon bei  $\mathcal{E} = 600 \text{ Volt cm}^{-1}$  zu versagen beginnt [7], [8], und SHOCKLEY [9] konnte diese Tatsache durch den Hinweis aufklären, daß die Energieübertragung zwischen dem Elektronengas und dem Gitter schon bei diesen Feldstärken nicht mehr zu einer genügenden Kühlung des Elektronengases ausreicht, so daß das Elektronengas viel heißer als das Gitter wird — eine Erscheinung, die bei Gasentladungen in analoger Weise zu enormen Temperaturunterschieden zwischen dem Elektronen- und dem Ionengas führt.

Die Ansätze (2) bis (4) versagen also zunächst einmal bei Feldstärken und bei Konzentrationsgradienten, die in den  $p$ - $i$ - $n$ -Strukturen sicher überschritten werden; durch das Eintreten des ZENEReffektes wissen wir ja, daß bei Sperrbelastungen Feldstärken von etwa  $10^5 \text{ Volt cm}^{-1}$  an gewissen Stellen in den Gleichrichtern auftreten. Wir glauben aber trotzdem, daß die Verwendung der Ansätze (2) bis (4) nicht ernsthaft zu beanstanden ist.

Die kritischen Feldstärken und Konzentrationsgradienten treten nämlich an den Grenzen zwischen den hochdotierten Randzonen und der undotierten Mittelzone auf. Wir werden aber sehen, daß in den Randgebieten der Mittelzone auch bei Stromdurchgang mit großer Annäherung BOLTZMANN-Gleichgewicht herrscht. Allein diese Beziehung zwischen Konzentrations- und Potentialwerten ist aber in diesen Randzonen für die Theorie wirklich wesentlich, nicht das OHMSche Gesetz:  $i_{n\text{Feld}} = e \mu_n n(x) \cdot \mathcal{E}(x)$  und der Diffusionsansatz:  $i_{n\text{Diff}} = e D_n n'(x)$ . Im Gegensatz zu diesen Gesetzen ist nun der BOLTZMANN-Zusammenhang zwischen Konzentration und Potential recht universell gültig, insbesondere auch in starken Potential- und Konzentrationsgradienten. Es kommt also unseres Erachtens gar nicht so darauf an, welche Ansätze im einzelnen in den Randgebieten der Mittelzone gemacht werden, wenn diese Ansätze nur auf annäherndes BOLTZMANN-Gleichgewicht auch bei Stromdurchgang hinführen. Das ist aber bei den Ansätzen (2) ... (4) der Fall, wie wir in Kapitel IV Abschn. 4 genauer sehen werden.

## 2. Die Kontinuitätsgleichungen für den Elektronen- und für den Defekt-elektronenstrom.

Wir erwähnten zu Beginn des vorigen Abschn. 1, daß im Gegensatz zur Gesamtstromdichte  $i$  die Elektronen- und Defektelektronenstromdichten  $i_n(x)$  und  $i_p(x)$  nicht divergenzfrei zu sein brauchen. Wenn trotzdem ein stationärer Zustand vorliegen und infolgedessen die Konzentrationen  $n(x)$  und  $p(x)$  zeitunabhängig sein sollen, müssen die jeweiligen örtlichen Divergenzen  $\frac{di_n}{dx}$  und  $\frac{di_p}{dx}$  von geeigneten örtlichen Quellen für Elektronen bzw. Defektelektronen gerade gedeckt werden. Die fraglichen Quellen sind nun dadurch gegeben, daß bei Stromdurchgang nicht mehr wie im thermischen Gleichgewicht die Zahl  $rnp$  der Rekombinationsprozesse gerade gleich der Zahl  $g = r \cdot n_i^2$  der Neuerzeugungsakte ist, sondern daß ein positiver oder negativer Rekombinationsüberschuß

$$\Re = rnp - g = r(np - n_i^2) \quad (5)$$

vorliegt. Mit der Konzentrationsabhängigkeit des Wiedervereinigungskoeffizienten  $r$  werden wir uns so gleich zu beschäftigen haben. Zuvor halten wir fest, daß im stationären Fall

$$\left( \frac{1}{-e} \right) \frac{di_n}{dx} = -\Re \quad \left( \frac{1}{+e} \right) \frac{di_p}{dx} = -\Re \quad (6)$$

sein muß bzw. mit Hilfe von (2) und (3)

$$D_n \frac{d^2 n}{dx^2} + \mu_n \frac{d}{dx} (n(x) \cdot \mathcal{E}(x)) = \Re \quad (7)$$

$$D_p \frac{d^2 p}{dx^2} - \mu_p \frac{d}{dx} (p(x) \cdot \mathcal{E}(x)) = \Re. \quad (8)$$

In manchen Fällen ist es vorteilhaft, diese beiden Gleichungen zusammenzufassen. Multiplikation von (7) mit  $\frac{\mu_p}{\mu_n}$  und Addition zu (8) gibt

$$D_p \frac{d^2}{dx^2} (p + n) - \mu_p \frac{d}{dx} ((p - n) \mathcal{E}) = \left( 1 + \frac{\mu_p}{\mu_n} \right) \Re; \quad (9)$$

denn nach NERNST, TOWNSEND und EINSTEIN ist ja  $D = \mu \cdot \frac{kT}{e} = \mu \mathfrak{B}^1$  und damit  $\frac{\mu_p}{\mu_n} D_n = D_p$ .

Nun aber müssen wir uns mit dem zunächst durch (5) gegebenen Rekombinationsüberschuß  $\Re$  und insbesondere mit dem Wiedervereinigungskoeffizienten  $r$  genauer beschäftigen. Freilich ist der Wiedervereinigungskoeffizient  $r$  eine Größe, die experimentell nicht direkt zugänglich ist im Gegensatz zu gewissen „Abklingzeiten“ und „Lebensdauern“, die bei Störungen des thermischen Gleichgewichts für den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen charakteristisch sind. Es ist deshalb naheliegend, von  $r$  zu einer Zeitgröße überzugehen und da  $r$  die Dimension  $\text{cm}^3 \text{ sek}^{-1}$  hat, wird man diese Zeitgröße durch

$$r = \frac{1}{\tau^* n_i} \quad (10)$$

definieren. Die Inversionsdichte  $n_i$  spielt dabei gewissermaßen die Rolle einer Normalkonzentration. Mit

<sup>1</sup> Wir werden an Stelle der thermischen Energie  $kT$  stets ihr Voltäquivalent  $\mathfrak{B} = kT/e$  in unseren Gleichungen führen. Diese gewinnen dadurch häufig an Übersichtlichkeit. Bei  $T = 300^\circ \text{ K}$  ist  $\mathfrak{B} = 0,0258 \text{ Volt}$ .



10) nimmt (5) die Gestalt

$$\Re(n, p) = \frac{n \cdot p - n_i^2}{n_i \tau^*} \quad (11)$$

in, wobei jetzt  $\tau^{*1}$ ) konzentrationsabhängig sein kann:

$$\tau^* = \tau^*(n, p). \quad (12)$$

Nach den bisherigen experimentellen Erfahrungen [11], [12] scheint es vernünftig zu sein, diese Konzentrationsabhängigkeit durch einen linearen Ansatz

$$\tau^*(n, p) = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 \frac{n}{n_i} + \mathfrak{T}_3 \frac{p}{n_i} \quad (13)$$

zu beschreiben.

Der Versuch von SHOCKLEY und READ [13] und von HALL [11], die beobachteten Rekombinationserscheinungen mit Hilfe des sogenannten Trap-Modells zu deuten, führt auf die Gesetzmäßigkeit

$$\tau^* = \frac{1}{\sigma_p v_{th} n_T} \cdot e^{-\frac{\Delta E}{kT}} + \frac{1}{\sigma_n v_{th} n_T} e^{+\frac{\Delta E}{kT}} + \frac{1}{\sigma_p v_{th} n_T} \cdot \frac{n}{n_i} + \frac{1}{\sigma_n v_{th} n_T} \cdot \frac{p}{n_i} \quad (14)$$

Dabei ist  $\sigma_p$  der Einfangquerschnitt der (negativ geladenen) Traps gegenüber Defektelektronen und  $\sigma_n$  der Einfangquerschnitt der (neutralen) Traps gegenüber Leitungselektronen.

$v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$  ist die thermische Geschwindigkeit freier Elektronen bei der Halbleitertemperatur und  $n_T$  ist die Gesamtkonzentration der (geladenen + ungeladenen) Traps. Mit  $\Delta E$  ist ferner der energetische Abstand bezeichnet, um den das Energieniveau der Traps unter der Mitte des verbotenen Bandes liegt:

$$\Delta E = \frac{1}{2} (E_G - E_V) - E_T.$$

Ein Vergleich von (14) und (13) ergibt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= \frac{1}{\sigma_p v_{th} n_T} \cdot e^{-\frac{\Delta E}{kT}} + \frac{1}{\sigma_n v_{th} n_T} e^{+\frac{\Delta E}{kT}} \\ \mathfrak{T}_2 &= \frac{1}{\sigma_p v_{th} n_T} \\ \mathfrak{T}_3 &= \frac{1}{\sigma_n v_{th} n_T} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Nach den bisherigen Untersuchungen liegt beim Germanium das Trapniveau unterhalb der Bandmitte. Es ist also  $\Delta E > 0$  und

$$e^{+\frac{\Delta E}{kT}} \gg e^{-\frac{\Delta E}{kT}}.$$

<sup>1</sup>  $\tau^*$  selbst hat noch nicht unmittelbar die angestrebte Bedeutung einer „Lebensdauer  $\tau$ “, mit der eine kleine Abweichung von einem Gleichgewichtszustand  $n, p$  zeitlich wieder abklingt. Es ist

$$\tau = \frac{1}{r(n+p)}$$

[Siehe hierzu z. B. [10] Gl. V 2.13 und V 2.14, wobei die dortige Vernachlässigung  $p \ll n$  nicht zu machen ist.] Es gilt also allgemein

$$\tau^* = \frac{n+p}{n_i} \tau.$$

Speziell wird

in einem Überschußhalbleiter ( $n = n_{D^+} \gg n_i \gg p$ )

$$\tau^* = \frac{n_D}{n_i} \tau,$$

und in einem Defektleiter ( $p = n_{A^-} \gg n_i \gg n$ )

$$\tau^* = \frac{n_{A^-}}{n_i} \tau$$

und in einem Eigenleiter ( $n = p = n_i$ )

$$\tau^* = 2 \tau.$$

Weiter hat sich beim Germanium bisher für die Einfangquerschnitte

gezeigt. Es wird dann

$$\mathfrak{T}_1 \approx \frac{1}{\sigma_n v_{th} n_T} e^{+\frac{\Delta E}{kT}} \gg \mathfrak{T}_2 \text{ und } \mathfrak{T}_3 \quad (16)$$

Mit dem Ansatz (13) folgt aus (11)

$$\Re(n, p) = \frac{n \cdot p - n_i^2}{\mathfrak{T}_1 n_i + \mathfrak{T}_2 n + \mathfrak{T}_3 p}. \quad (17)$$

Es ist offensichtlich, daß eine Lösung der Diff. Gl. (7), (8) oder (9) nur in solchen Fällen mit Aussicht auf Erfolg versucht werden kann, in denen es möglich ist, (17) auf eine einfache z. B. lineare Form zu reduzieren.

Im *p*-Gebiet eines *p-n*-Gleichrichters beispielsweise gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} p &= p_p = n_{A^-} \gg n_i \text{ (siehe Fußnote 1)} \\ n_i^2 &= p_p \cdot n_p = n_{A^-} \cdot n_p \text{ (siehe Fußnote 1)}. \end{aligned}$$

Im Nenner von (17) dominiert dann das Glied  $\mathfrak{T}_3 n_{A^-}$  (siehe Fußnote 2)

$$\mathfrak{T}_1 n_i + \mathfrak{T}_2 n + \mathfrak{T}_3 p \approx \mathfrak{T}_3 \cdot n_{A^-}$$

und so wird

$$\Re = \frac{n - n_p}{\tau_n}, \quad (18)$$

wobei die „Lebensdauer  $\tau_n$  der Minoritätsträger  $\ominus$ “ gleich  $\mathfrak{T}_3$  ist:

$$\tau_n = \mathfrak{T}_3. \quad (19)$$

### 3. Die Poissonsche Gleichung.

Am Anfang und am Ende elektrischer Kraftlinien befinden sich elektrische Ladungen. Diesen anschaulich formulierten Tatbestand beschreibt mathematisch die Poissonsche Gleichung

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{4\pi}{\epsilon} \varrho(x). \quad (20)$$

In einem Halbleiter tragen zur Raumladungsdichte  $\varrho(x)$  die Elektronen, die Defektelektronen und die dissoziierten Störstellen  $D^+$  und  $A^-$  bei:

$$\varrho(x) = e \cdot (p - n + n_{D^+} - n_{A^-}), \quad (21)$$

so daß sich

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{4\pi e}{\epsilon} (p - n + n_{D^+} - n_{A^-}) \quad (22)$$

ergibt. Wir wollen voraussetzen, daß außer den  $D^+$  und den  $A^-$ , unter denen wir die gewohnten wasserstoffähnlichen Donatoren der V. Gruppe oder Akzeptoren der III. Gruppe des periodischen Systems verstehen wollen, keine weiteren geladenen Störstellensorten in der Raumladungsbilanz berücksichtigt werden müssen. Diese Voraussetzung kann einmal dadurch verwirklicht werden, daß tatsächlich keine anderen Störstellensorten vorhanden sind. Es können aber auch weitere Störstellensorten mit Donator- und Akzeptorcharakter in den Halbleiter eingebaut sein (die sich von den bereits erwähnten Donatoren und Akzeptoren durch größere Ablösearbeiten unterscheiden), deren Raumladungen aber trotzdem nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Das kann z. B. darauf beruhen, daß die Konzentrationen dieser zusätzlichen Störstellen so gering sind oder daß sie sich raumladungsmäßig so gut kompensieren, daß ihre Aufnahme

<sup>1</sup> Diese Beziehungen gelten natürlich, wie wir sehen werden, auch im *p*-Gebiet des *p-i-n*-Gleichrichters, für das damit also ebenfalls (18) und (19) Gültigkeit haben wird.

<sup>2</sup> Zumindest bei sehr hohen Dotierungen. Bei schwachen Dotierungen kann das Glied  $\mathfrak{T}_1 \cdot n_i$  noch von Einfluß sein.



in die Raumladungsbilanz (21) überflüssig ist. Das hindert nicht, daß sie sich dennoch bemerkbar machen und zwar über den Rekombinationsmechanismus, z. B. in dem Trap-Modell von SHOCKLEY-READ und HALL. Da aber diese Verhältnisse von Fall zu Fall variieren werden und nur überflüssige Komplikationen verursachen, die die Herausarbeitung typischer, übersichtlicher und charakteristischer Resultate verhindern, berücksichtigen wir in (21) nur die gewohnten Donatoren und Akzeptoren. Es lag uns aber daran, zu betonen, daß es keinen logischen Widerspruch bedeutet, als Ladungsbilanz die Gl. (21) anzusetzen und trotzdem mit Gesetzmäßigkeiten wie (13) zu arbeiten, die z. B. von SHOCKLEY-READ und von HALL mit Hilfe einer weiteren Störstellensorte erklärt werden.

#### 4. Zusammenfassung.

In Abschn. 1 haben wir die Zusammensetzung der Gesamtstromdichte  $i$  aus den Feld- und Diffusionsstromdichten der Elektronen und Defektelektronen geschildert und dabei die Gl. (4) gefunden. In Abschn. 2 kamen die beiden Kontinuitätsgleichungen (7) und (8) für die Elektronen- und die Defektelektronenstromdichte hinzu. In Abschn. 3 wurde schließlich die Poissonsche Gleichung (22) für die Divergenz der Feldstärke  $\mathcal{E}(x)$  aufgestellt. Es scheinen also 4 Grundgleichungen für nur drei Unbekannte vorhanden zu sein; denn außer den beiden Konzentrationen  $n(x)$  und  $p(x)$  und der Feldstärke  $\mathcal{E}(x)$  ist ja keine weitere Unbekannte zu ermitteln. Diese scheinbare Überbestimmtheit der in dem Halbleiter vorliegenden physikalischen Situation klärt sich sofort dadurch auf, daß die Gl. (4) von den Gleichungen (7) und (8) nicht unabhängig ist. Subtraktion von (7) und (8) und einmalige Integration führt nämlich, wie man sich sofort überzeugt, auf (4) und die Gesamtstromdichte  $i$  hat dabei die Bedeutung einer Integrationskonstanten.

Man könnte also als unabhängige Fundamentalgleichungen die beiden Kontinuitätsgleichungen (7) und (8) einzeln und dazu dann noch die Poissonsche Gleichung (22) verwenden. Andererseits wird man aber die eben geschilderte und an keine speziellen Voraussetzungen gebundene Möglichkeit der einmaligen Integration der Differenz von (7) und (8) ausnutzen und deshalb auf die sich dabei ergebende Gl. (4) als Fundamentalgleichung ungern verzichten. Neben dieser Gl. (4) verwenden wir dann nicht die Gln. (7) und (8) einzeln als Fundamentalgleichungen, sondern die aus diesen durch Addition entstehende und in  $p$  und  $n$  wieder symmetrische Gl. (9). Als dritte Fundamentalgleichung kommt dann die Poissonsche Gl. (22) hinzu.

Auf diese Weise haben wir als Fundamentalgleichungen für die drei Unbekannten  $n(x)$ ,  $p(x)$  und  $\mathcal{E}(x)$  entweder

$$\left. \begin{aligned} D_n \frac{d}{dx} n(x) - D_p \frac{d}{dx} p(x) + \mu_n n(x) \cdot \mathcal{E}(x) \\ + \mu_p p(x) \mathcal{E}(x) = \frac{1}{e} i \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} D_p \frac{d^2}{dx^2} [p(x) + n(x)] - \mu_p \frac{d}{dx} [(p(x) - n(x)) \mathcal{E}(x)] \\ = \left(1 + \frac{\mu_p}{\mu_n}\right) \mathcal{R}(n(x), p(x)) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$p(x) - n(x) + n_{D+} - n_{A-} = \frac{\varepsilon}{4\pi e} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \quad (25)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} i_n(x) &= \frac{d}{dx} \left[ + e D_n \frac{dn}{dx} + e \mu_n n(x) \mathcal{E}(x) \right] \\ &= e \cdot \mathcal{R}(n(x), p(x)) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} i_p(x) &= \frac{d}{dx} \left[ - e D_p \frac{dp}{dx} + e \mu_p p(x) \mathcal{E}(x) \right] \\ &= - e \cdot \mathcal{R}(n(x), p(x)) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$p(x) - n(x) + n_{D+} - n_{A-} = \frac{\varepsilon}{4\pi e} \frac{d\mathcal{E}}{dx}. \quad (28)$$

### A. Der $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichter.

Den  $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichter, den wir in den folgenden Kapiteln behandeln wollen, schematisieren wir durch folgende Anordnung:

Ein streng eigenleitendes Mittelgebiet

$$n_{D+} - n_{A-} = 0$$

habe die Dicke  $2d$ . Nach links schließt sich ein hochdotiertes defektleitendes  $p$ -Gebiet an mit einer Dotierungskonzentration <sup>1</sup>

$$n_{A-} \gg n_i \text{ (siehe Fußnote } ^2),$$

nach rechts ein hochdotiertes überschußleitendes  $n$ -Gebiet mit einer Dotierungskonzentration

$$n_{D+} \gg n_i \text{ (siehe Fußnote } ^2).$$

An den beiden Grenzen zwischen den hochdotierten Gebieten und dem Mittelgebiet nehmen wir einen sprunghaften Verlauf der Dotierungen von  $n_{A-}$  auf 0 bzw. von  $n_{D+}$  auf 0 an <sup>3</sup>. Die Kristallstruktur des Mittelgebietes soll sich dabei ungestört in den hochdotierten Bereichen fortsetzen, so daß nicht durch Gitterstörungen zusätzliche Rekombinationszentren entstehen. Vor allem soll an den Dotierungsgrenzen keine Flächenrekombination auftreten <sup>4</sup>.

Die Höhe der Dotierungskonzentration ist für unsere Überlegungen unerheblich, solange die Bedingungen  $n_{A-} \gg n_i$  und  $n_{D+} \gg n_i$  erfüllt sind <sup>5</sup>. Ebenso ist die Längenausdehnung der hochdotierten Bereiche für das Verhalten des  $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichters unerheblich.

<sup>1</sup> Wir rechnen im folgenden stets mit Störstellenerschöpfung, setzen also die Konzentration  $n_{A-}$  bzw.  $n_{D+}$  der geladenen Störstellen gleich ihrer Gesamtkonzentration  $N_A$  bzw.  $N_D$ . Bei der geringen Ionisierungsenergie der normalerweise vorhandenen Störstellen dürfte dies bei 300° K noch bis zu Dotierungskonzentrationen von etwa  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$  gestattet sein. Siehe z. B. [10] S. 48 u. 49.

<sup>2</sup>  $n_i$  ist dabei die Inversionsdichte, d. i. die Gleichgewichtskonzentration der Elektronen und Defektelektronen im eigenleitenden Material. Für  $n_i$  gilt mit Hilfe der „effektiven Zustandsdichten“ (Entartungskonzentrationen)  $N_C$  im Leitungsband und  $N_V$  im Valenzband und mit Hilfe der Energiedifferenz  $E_{CV}$  zwischen Valenzband und Leitungsband:

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_{CV}}{kT}}$$

<sup>3</sup> Diese Annahme dient lediglich der Vereinfachung der Darstellung, ist jedoch auf die Ergebnisse unserer Überlegungen praktisch ohne Einfluß.

<sup>4</sup> Diese Voraussetzung soll nach den Angaben von R. N. HALL [6] bei den technischen Produkten befriedigend erfüllt sein.

<sup>5</sup> In Kapitel IV Abschn. 1 werden wir sehen, daß die Höhe der Dotierung im wesentlichen den Gültigkeitsbereich unserer Betrachtungen begrenzt. Siehe insbesondere (88) und (89).



Vir können sie uns einfach als unendlich ausgedehnt vorstellen. Daß diese Gebiete hoher Leitfähigkeit endlich begrenzt sind, berücksichtigen wir summarisch dadurch, daß wir den Spannungsabfall über diesen Bereichen (soweit er nicht durch Raumladungseffekte be-  
rührt wird) vernachlässigen<sup>1</sup>.

In den folgenden Kapiteln III—V wollen wir das Gleichstromverhalten einer solchen  $p$ - $i$ - $n$ -Struktur untersuchen. Wir beginnen mit der Betrachtung des unbelasteten Gleichrichters.

### III. Der unbelastete $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichter.

Qualitative Beschreibung der Konzentrationsverteilungen und des Potentialverlaufes.

Die Konzentrationsverteilungen  $p(x)$  der Defektelektroden und  $n(x)$  der Elektronen, sowie der Potentialverlauf  $V(x)$  in einem unbelasteten  $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichter sind in Abb. 3 dargestellt<sup>2</sup>. Im Innern des eigenleitenden Gebietes nehmen Elektronen und Defektelektroden die Gleichgewichtskonzentration  $n_i$  an

$$p(x) = n(x) = n_i. \quad (29)$$

Ferner müssen im Innern der hochdotierten Bereiche die Gleichgewichtswerte

$$p(x) = p_p = n_{A-} \quad (30)$$

$$n(x) = n_p = \frac{n_i^2}{n_{A-}} \quad (31)$$

des  $p$ -Materials bzw.

$$p(x) = p_n = \frac{n_i^2}{n_{D+}} \quad (32)$$

$$n(x) = n_n = n_{D+} \quad (33)$$

des  $n$ -Materials angenommen werden<sup>3</sup>. Der Übergang von dem Gleichgewichtswert des undotierten Gebietes zu den Gleichgewichtswerten der hochdotierten Bereiche folgt nun nicht abrupt dem Störstellenverlauf, sondern findet in einer verschliffenen Form statt, die links und rechts von jeder Dotierungsgrenze dem Betrage nach gleiche Raumladungen entgegengesetzten Vorzeichens entstehen läßt. Diese Raumladungen bauen in diesen Übergangszonen jeweils eine Diffusionsspannung  $V_D$  auf, deren Größe von dem Verhältnis  $\frac{n_{D+}}{n_i}$  bzw.  $\frac{n_{A-}}{n_i}$  abhängt. Der überwiegende Anteil der Diffusionsspannung fällt dabei über dem eigenleitenden Gebiet ab. Der Potentialabfall in den hochdotierten Gebieten ist dagegen gering. Im Innern der Mittelzone und der hochdotierten Bereiche ist das Potential

<sup>1</sup> Die vernachlässigten Bahnwiderstände können im übrigen durch die bekannte Kennlinien-Scherung berücksichtigt werden. Siehe z. B. [10] Seite 77 und 78.

<sup>2</sup> Die Maßstäbe sind dabei so gewählt, daß einer Differenz  $\beta$  in der Potentialkurve ein Faktor  $e^\beta$  in der Konzentrationsdarstellung entspricht. Dann werden in den Gebieten, in denen BOLTZMANN-Gleichgewicht herrscht, Potential- und Konzentrationsverlauf kongruent bzw. spiegelbildlich kongruent [10] S. 77, vgl. auch Gl. (36) der vorliegenden Arbeit.

<sup>3</sup> Die Beziehungen (30) bis (33) gelten nur für  $n_{A-} \gg n_i$  bzw.  $n_{D+} \gg n_i$ . Streng gilt z. B. im  $p$ -Gebiet

$$p_p = \frac{1}{2} n_{A-} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} n_{A-}\right)^2 + n_i^2} \quad \text{und} \quad n_p = \frac{n_i^2}{p_p},$$

wie man mit Hilfe der Quasineutralitätsbeziehung

$$p - n - n_{A-} = 0$$

und mit dem Massenwirkungsgesetz

$$p \cdot n = n_i^2$$

verifizieren kann.

konstant

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{dV}{dx} = 0. \quad (34)$$

Bei der zeichnerischen Darstellung in Abb. 3 ist ein symmetrischer  $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichter mit

$$n_{D+} = n_{A-} = 10^5 n_i$$

angenommen worden. Die Diffusionsspannung  $V_D$  wird in diesem Fall an beiden Übergängen gleich groß. Der Nullpunkt des Potentials ist so festgelegt worden, daß

$$V(+\infty) = 0 \quad (35)$$

wird. Der Nullpunkt der Ortskoordinate liegt in der Mitte des eigenleitenden Gebietes. Bei einer Breite  $2d$

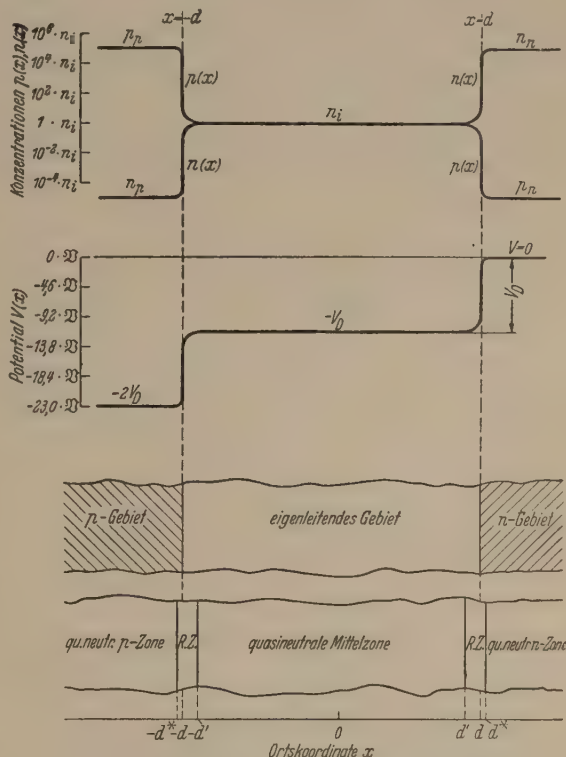


Abb. 3. Der unbelastete  $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichter (schematisch).  
( $n_{A-} = n_{D+} = 10^5 n_i$ ).

dieses Bereiches liegen also die Sprungstellen der Dotierung bei  $x = \pm d$ .

Während die Dotierung eine räumliche Einteilung des  $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichters in 3 Gebiete, nämlich in

das undotierte Mittelgebiet  $-d \leq x \leq +d$   
und

die beiden hochdotierten Gebiete  $x \leq -d$   
bzw.  $+d \leq x$ ,

erzeugt, wird bei Mitberücksichtigung der beweglichen Ladungsträger schon rein anschaulich (vgl. Abb. 3) eine Unterscheidung von 5 räumlichen Zonen nahegelegt, nämlich

einer quasineutralen Mittelzone  $-d' \leq x \leq +d'$   
der beiden quasineutralen hochdotierten Zonen  $x \leq -d^*$   
bzw.  $x \geq +d^*$

und der beiden Übergangs- oder Raumladungszonen

$$-d^* \leq x \leq -d' \quad \text{bzw.} \quad +d' \leq x \leq +d^*.$$

<sup>1</sup> Siehe Fußnote <sup>1</sup> auf S. 104.



Die Mittelzone und die hochdotierten Zonen sind im stromlosen Fall durch die Gln. (29) bis (35) vollständig beschrieben<sup>2</sup>. Die Raumladungsgebiete umfassen jeweils einen Teil des Mittelbereiches und eines hochdotierten Gebietes und sind im allgemeinen außerordentlich schmal, verglichen mit den Abmessungen der drei anderen Zonen. Wir werden sie in dem folgenden Paragraphen quantitativ behandeln.

Schon rein anschaulich sieht man jedoch aus Abb. 3, daß in diesen Gebieten z. T. außerordentlich hohe Feldstärken und Diffusionsgradienten herrschen. Dies führt zu hohen lokalen Feld- und Diffusionsströmen, die sich im stromlosen Fall gegenseitig kompensieren müssen. Wie man an Hand der Abb. 3 ersieht, sind dabei die Feld- und Diffusionsströme gerade entgegengesetzt gerichtet und zwar sowohl bei den Elektronen wie bei den Defektelektronen. Die Vorgänge in diesen Raumladungszonen sind entscheidend durch dieses Gegeneinanderwirken von Feld- und Diffusionsströmen bestimmt. Dies führt, wie wir sehen werden, zu einer BOLTZMANN-Verteilung der Elektronen- und Defektelektronenkonzentrationen. Wir werden daher die Raumladungszonen auch als BOLTZMANN-Zonen bezeichnen.

## 2. Quantitative Behandlung.

Wir wollen im folgenden stets mit einem überall auf gleicher Temperatur befindlichen Gleichrichter rechnen. Dann herrscht im stromlosen Fall thermisches Gleichgewicht und die Elektronen- bzw. Defektelektronen-Konzentrationen  $n(x)$  bzw.  $p(x)$  sind mit dem elektrostatischen Potential  $V(x)$  durch das sogenannte BOLTZMANN-Gesetz verknüpft:

$$\left. \begin{aligned} n(x) &\sim e^{+\frac{V(x)}{\mathfrak{B}}} \\ p(x) &\sim e^{-\frac{V(x)}{\mathfrak{B}}} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Bei der qualitativen Beschreibung in Abschn. 1 sahen wir, daß tief im  $n$ -Gebiet  $n(x) = n_{D+}$  und in der Mitte der Mittelzone  $n = n_i$  ist. Berücksichtigen wir dies in (36), so erhalten wir für die Diffusionsspannung  $V_D$  zwischen dem rechten  $n$ -Gebiet und der Mittelzone

$$V_D = \mathfrak{B} \ln \frac{n_{D+}}{n_i}. \quad (37)$$

Weiter ist im thermischen Gleichgewicht die Neuerzeugung gleich der Rekombination, so daß die Größe  $\mathfrak{R}$  in Gl. (24) verschwindet. Durch Einsetzen in die Gln. (23) und (24) sieht man, daß (36) diese beiden Fundamentalgleichungen exakt erfüllt. Die dritte Fundamentalgleichung, die Poissonsche Gleichung (25) liefert mit (36) zusammen eine Differentialgleichung für den Potentialverlauf  $V(x)$ .

<sup>1</sup> Die Grenzen der Raumladungszonen  $d' < d < d^*$  bzw.  $-d^* < -d < -d'$  sind in Abb. 3 mit eingetragen. Darüber, wie  $d'$  festzulegen ist, vgl. man III Abschn. 2d und vor allem IV Abschn. 4. Die Lage der Grenzen  $\pm d^*$  soll uns im folgenden nicht näher interessieren. Bei keiner unserer Überlegungen wird sie von Bedeutung werden.

<sup>2</sup> Die Unterscheidung von Raumladungszonen und quasineutralen Zonen hat allerdings im stromlosen Fall mehr formalen Charakter. Im unbelasteten Gleichrichter werden nämlich die quasineutralen Zonen und die Raumladungszonen durch eine einheitliche Gesetzmäßigkeit beherrscht, die allerdings die Gl. (29) bis (33) als gute Näherungslösungen für die quasineutralen Zonen liefert. Die Aufteilung in Raumladungszonen und quasineutrale Zonen unterliegt daher hier einer gewissen Willkür (vgl. III Abschn. 2d).

a) *Eigenleitendes Mittelgebiet*  $x \leq +d$  (siehe Fußnote<sup>1</sup>).

Die in (36) freigelassenen Konstanten müssen hier im Mittelgebiet folgendermaßen festgelegt werden:

$$n(x) = n_i e^{+\frac{V(x) + V_D}{\mathfrak{B}}} \quad (38)$$

$$p(x) = n_i e^{-\frac{V(x) + V_D}{\mathfrak{B}}} \quad (39)$$

Weiter ist im Mittelgebiet  $n_{D+} - n_{A-} = 0$ . Berücksichtigen wir schließlich noch  $\mathfrak{E}(x) = -\frac{d}{dx} V(x)$ , so nimmt die Poissonsche Gleichung (25) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{dx^2} &= -\frac{4\pi e}{\epsilon} (p(x) - n(x)) \\ &= +\frac{4\pi e n_i}{\epsilon} \cdot 2 \operatorname{Sh} \frac{V(x) + V_D}{\mathfrak{B}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Durch Einsetzen und Ausdifferenzieren bestätigt man, daß

$$V(x) = -V_D + \mathfrak{B} \cdot \ln \operatorname{Coth}^2 \left( a - \frac{x}{\sqrt{2} x_{0i}} \right) \quad (41)$$

eine Lösung von (40) ist, wobei

$a$  = Integrationskonstante

$x_{0i} = \sqrt{\frac{\epsilon \mathfrak{B}}{4\pi e n_i}}$  = „DEBYE-Länge“<sup>2</sup> der eigenleitenden Mittelzone  $i$  ist.

Zur Veranschaulichung dieser Lösung weisen wir darauf hin, daß (41) mit (38) und (39) folgende Konzentrationsverteilungen liefert:

$$n(x) = n_i \operatorname{Coth}^2 \left( a - \frac{x}{\sqrt{2} x_{0i}} \right) \quad (43)$$

$$p(x) = n_i \operatorname{Tgh}^2 \left( a - \frac{x}{\sqrt{2} x_{0i}} \right). \quad (44)$$

Für  $x \rightarrow -\infty$  wird:

$$n(-\infty) = n_i, \quad p(-\infty) = n_i \quad \text{und} \quad V'(-\infty) = 0 \quad (45)$$

und für  $x = \sqrt{2} x_{0i} a$  wird:

$$n(\sqrt{2} x_{0i} a) = +\infty, \quad p(\sqrt{2} x_{0i} a) = 0. \quad (46)$$

Die Lösung (41) (43) (44) ist also geeignet, den Übergang aus der quasineutralen Mittelzone in die rechte hochdotierte  $n$ -Zone darzustellen, wobei der Einfachheit halber die Mittelzone nach links als unendlich ausgedehnt angesehen wird. Die Integrationskonstante  $a$  gibt die Freiheit, den stetigen Anschluß an die Lösung im hochdotierten  $n$ -Gebiet herzustellen, mit deren Ermittlung wir uns jetzt befassen werden.

b) *Hochdotiertes  $n$ -Gebiet*  $+d \leq x$ .

Die in (36) freigelassenen Konstanten müssen im hochdotierten  $n$ -Gebiet folgendermaßen festgelegt werden:

$$n(x) = n_{D+} e^{+\frac{V(x)}{\mathfrak{B}}} \quad (47)$$

$$p(x) = \frac{n_i^2}{n_{D+}} e^{-\frac{V(x)}{\mathfrak{B}}} \quad (48)$$

<sup>1</sup> Wir beschränken uns hier auf die Behandlung der rechten Raumladungszone bei  $x = +d$ .

<sup>2</sup> Siehe z. B. [10], Kap. IV § 8, S. 101.



amit nimmt die POISSONSche Gleichung folgende Gestalt an:

$$\frac{V}{x^2} = -\frac{4\pi e}{\epsilon} ((n_{D^+} + p(x) - n(x)) \\ = -\frac{4\pi e n_{D^+}}{\epsilon} \left[ 1 + \left( \frac{n_i}{n_{D^+}} \right)^2 e^{-\frac{V(x)}{\mathfrak{B}}} - e^{+\frac{V(x)}{\mathfrak{B}}} \right]. \quad (49)$$

Es wird sich zeigen, daß innerhalb des hochdotierten Gebietes  $|V(x)| \leq \mathfrak{B}$  bleibt. Wenn wir also in der Klammer das zweite, die Raumladung der Defekt-elektronen repräsentierende Glied weglassen, begehen wir eine Vernachlässigung der Ordnung  $\left( \frac{n_i}{n_{D^+}} \right)^2 \approx 10^{-10}$  gegen 1. Wir erhalten somit

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\mathfrak{B}}{x_{0n}^2} \left( 1 - e^{+\frac{V(x)}{\mathfrak{B}}} \right), \quad (50)$$

wobei  $x_{0n} = \sqrt{\frac{\epsilon \mathfrak{B}}{4\pi e n_{D^+}}} = \text{DEBYE-Länge des hochdotierten } n\text{-Gebietes}$  (51)

ist. Da die vollständige Lösung der Differentialgleichung (50) eine mit bekannten Transzendenten nicht ausführbare Quadratur enthält, begnügen wir uns mit folgendem intermediären Integral:

$$\frac{1}{2} x_{0n}^2 \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 = \mathfrak{B}^2 \left( e^{\frac{V(x)}{\mathfrak{B}}} - \frac{V(x)}{\mathfrak{B}} - 1 \right), \quad (52)$$

dessen Richtigkeit man durch Ausdifferenzieren bestätigen kann. Die Integrationskonstante ist dabei so gewählt, daß für  $V = 0$  auch  $\frac{dV}{dx} = 0$  wird. Hierzu ist man gezwungen, weil tief im Innern des  $n$ -Materials die Feldstärke  $-\frac{dV}{dx}$  verschwindet, und dort in Abschn. 1 willkürlich  $V = 0$  gesetzt wurde.

Wir haben schon erwähnt, daß die Absenkung des Potentialverlaufs im hochdotierten Gebiet kleiner als  $\mathfrak{B}$  bleibt. Damit wird der ganze Potentialverlauf dort uninteressant. Deshalb können wir uns mit dem intermediären Integral (52) begnügen, das wir andererseits brauchen, um in (41) die Integrationskonstante  $a$  zu bestimmen und zwar durch die Forderung des stetigen Anschlusses von Potential und Potentialgradient bei  $x = +d$ .

c) Der stetige Anschluß von  $V(x)$  und  $V'(x)$  bei  $x = +d$ .

Vom linken eigenleitenden Gebiet her, also aus der Gl. (41) folgt mit der Abkürzung

$$a - \frac{d}{\sqrt{2} x_{0i}} = b \quad (53)$$

für die Grenze  $x = +d$

$$V(d) = -V_D + \mathfrak{B} \ln \coth^2 b \quad (54)$$

$$V'(d) = \frac{4\mathfrak{B}}{\sqrt{2} x_{0i}} \frac{1}{\operatorname{csch} 2b}. \quad (55)$$

Andererseits sind im rechten hochdotierten Gebiet Potential und Potentialgradient durch (52) verknüpft, was für die Grenze  $x = +d$  auf

$$\frac{1}{2} x_{0n}^2 V'(d)^2 = \mathfrak{B}^2 \left( e^{+\frac{V(d)}{\mathfrak{B}}} - \frac{V(d)}{\mathfrak{B}} - 1 \right) \quad (56)$$

führt. Die Ausdrücke (54) und (55) in (56) eingesetzt, ergeben folgende Bestimmungsgleichung für die Inte-

grationskonstante  $b$ :

$$4 \frac{x_{0n}^2}{x_{0i}^2} \frac{1}{\operatorname{csch}^2 2b} = e^{-\frac{V_D}{\mathfrak{B}}} \coth^2 b + \frac{V_D}{\mathfrak{B}} - \ln \coth^2 b - 1. \quad (57)$$

Es wird sich nun zeigen, daß

$$b = O\left(\left(\frac{n_i}{n_{D^+}}\right)^{1/2}\right) \approx 3 \cdot 10^{-3} \ll 1 \quad (\text{siehe Fußnote } ^1), \quad (58)$$

wird. Deshalb sind die Näherungen

$$\operatorname{csch} 2b \approx 2b \quad \coth b \approx \frac{1}{b} \quad (59)$$

angebracht und aus (57) wird mit weiterer Hinzuziehung von (42), (51) und (37)

$$4 \frac{n_i}{n_{D^+}} \frac{1}{4b^2} = \frac{n_i}{n_{D^+}} \cdot \frac{1}{b^2} + \ln \frac{n_{D^+}}{n_i} - \ln \frac{1}{b^2} - 1$$

oder

$$b = \left( \frac{n_i}{n_{D^+}} \right)^{1/2} \cdot e^{1/2}. \quad (60)$$

(41), (53) und (60) ergeben jetzt für den Potentialverlauf im Mittelgebiet

$$V(x) = -V_D + \mathfrak{B} \cdot \ln \coth^2 \left( \frac{d-x}{\sqrt{2} x_{0i}} + \left( \frac{n_i}{n_{D^+}} \right)^{1/2} \cdot e^{1/2} \right). \quad (61)$$

Die Gleichungen (43) und (44) für die Konzentrationsverteilungen gehen mit (60) und (53) über in

$$n(x) = n_i \coth^2 \left( \frac{d-x}{\sqrt{2} x_{0i}} + \left( \frac{n_i}{n_{D^+}} \right)^{1/2} e^{1/2} \right) \quad (62)$$

$$p(x) = n_i \operatorname{csch}^2 \left( \frac{d-x}{\sqrt{2} x_{0i}} + \left( \frac{n_i}{n_{D^+}} \right)^{1/2} e^{1/2} \right). \quad (63)$$

d) Diskussion.

Wir haben im Absatz a) bereits bemerkt, daß die Verhältnisse in der Mitte des eigenleitenden Gebietes durch  $x \rightarrow -\infty$  geschildert werden. Aus (61) bis (63) folgt hierfür

$$\begin{aligned} V(x) &\rightarrow -V_D \\ n(x) &\rightarrow n_i \\ p(x) &\rightarrow n_i \end{aligned}$$

Von diesen Werten aus sinkt die  $p$ -Kurve nach rechts langsam ab und steigen die  $V$ - und die  $n$ -Kurven zunächst sehr langsam an, um dann in der Nähe der Grenze  $x = +d$  in einen sehr raschen Abfall bzw. Anstieg überzugehen (siehe Abb. 4). Ohne den Summanden  $\left( \frac{n_i}{n_{D^+}} \right)^{1/2} e^{1/2}$  im Argument der hyperbolischen Funktionen würde

$$p \rightarrow 0, \quad V \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad n \rightarrow \infty$$

bei  $x \rightarrow +d$  eintreten. Da aber wegen dieses Summanden die drei Kurven etwas nach rechts verschoben sind, wird bei  $x = +d$  folgender Potentialwert erreicht:

$$V(+d) = -V_D + \mathfrak{B} \ln \coth^2 \left( \left( \frac{n_i}{n_{D^+}} \right)^{1/2} e^{1/2} \right), \quad (64)$$

was mit Berücksichtigung von (58) und (59)

$$V(+d) = -V_D + \mathfrak{B} \ln \frac{n_{D^+}}{n_i} + \mathfrak{B} \ln e^{-1}$$

und weiter mit (37)

$$V(+d) = -\mathfrak{B} \quad (65)$$

<sup>1</sup> Das LANDAUSche Symbol  $O(a)$  bedeutet hier und im folgenden „von der Ordnung  $a$ “.



bzw.

$$n(+d) = n_{D+} e^{-1} \quad (66)$$

und schließlich

$$p(+d) = \frac{n_i^2}{n_{D+}} e^{+1} \quad (67)$$

gibt. Fast der ganze Potentialunterschied  $V_D = \mathfrak{B} \cdot \ln \frac{n_{D+}}{n_i}$  der viele  $\mathfrak{B}$  umfaßt, fällt also im eigenleitenden Mittelgebiet ab, während der Potentialunterschied innerhalb des hochdotierten  $n$ -Gebietes nur 1  $\mathfrak{B}$  beträgt und zwar bei großen Dotierungen  $n_{D+} \gg n_i$  praktisch unabhängig von der Dotierung  $n_{D+}$ .

Die Breite der Übergangszone, in der  $p(x)$ ,  $n(x)$  und  $V(x)$  nennenswerte Änderungen erfahren, wird im eigenleitenden Gebiet durch die DEBYELänge  $x_{0i}$  bestimmt. Für Germanium ( $\varepsilon = 16$ ,  $n_i = 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ) wird

$$x_{0i} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ cm} . \quad (68)$$

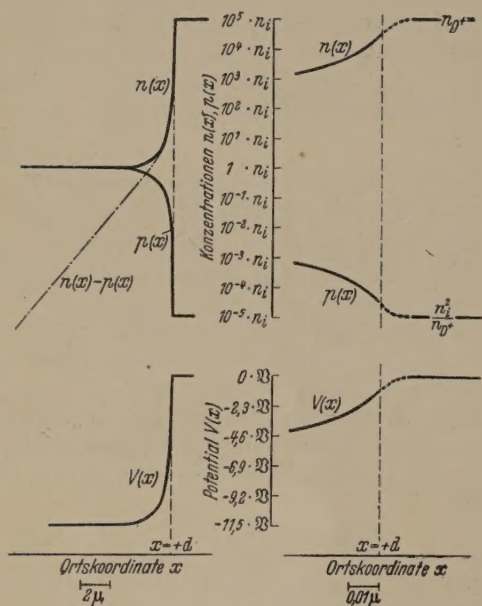


Abb. 4. Konzentrationsverteilungen und Potentialverlauf im unbelasteten  $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichter (rechte Übergangszone) ( $n_{D+} = 10^8 n_i$ ,  $x_{0i} = 1 \mu$ ).

$x_{0i}$  ist also sehr klein gegenüber der Breite des Mittelgebietes  $2d = 10^{-2} \text{ cm} \dots 10^{-1} \text{ cm}$ .

Das bedeutet also, daß sich der Übergang von den Randwerten zu den Gleichgewichtskonzentrationen im Mittelgebiet in einem Bereich vollzieht, der sehr schmal gegenüber der Breite des Mittelgebietes ist (Abb. 4).

Im hochdotierten  $n$ -Material wird entsprechend der Konzentrations- und der Potentialverlauf durch die DEBYE-Länge  $x_{0n}$  bestimmt. Wegen  $n_{D+} \gg n_i$  gilt nach (42) und (51):

$$x_{0n} \ll x_{0i} .$$

Die Potentialabsenkung in dem hochdotierten  $n$ -Gebiet ist also nicht nur in der Höhe sehr gering gegenüber dem Potentialabfall in der Mittelzone, sondern das gleiche gilt auch für die räumlichen Ausdehnungen. Dies ist der Grund, weshalb die Potentialabsenkung im  $n$ -Gebiet in der Abb. 4 links nicht dargestellt werden kann, obwohl ein Potentialunterschied 1  $\mathfrak{B}$  durchaus zeichnerisch erfassbar wäre. Dieser Abfall um 1  $\mathfrak{B}$  tritt nämlich innerhalb einiger Längen  $x_{0n} \approx 10^{-6} \text{ cm}$  ein und führt daher in der linken Zeichnung zu diesem prak-

tisch rechteckigen Abknicken des Potentialverlaufes an der Grenze  $x = +d$ .

Insgesamt geht aus dem bisher Gesagten wohl eindeutig die Berechtigung der in Abschn. 1 besprochene räumlichen Auftrennung des  $p$ - $i$ - $n$ -Gleichrichters in zwei hochdotierte Zonen, eine breite quasineutrale Mittelzone und zwei vergleichsweise dazu schmalen Raumladungszonen hervor. Als Maß für die Erfüllung der Quasineutralitätsforderung in der Mittelzone wird man dabei wohl das Verhältnis  $\left| \frac{p-n}{n_i} \right|$  wählen und die Grenzen  $(-d', +d')$  der Quasi-Neutralitätszone durch die Forderung

$$\frac{n(d') - p(d')}{n_i} = \frac{p(-d') - n(-d')}{n_i} = \delta \quad (69)$$

definieren. Welchen Wert man dabei im einzelnen für  $\delta$  vorschreibt, ist für die Begrenzung der Quasi-Neutralitätszone nicht entscheidend, da  $|p-n|$  zur Mitte des eigenleitenden Bereiches hin außerordentlich rasch abnimmt (Abb. 4). So ist z. B. für  $\delta = 1$  der Abstand  $d - d' \approx 1,5 \mu$ , während bei der sehr viel schärferen Forderung  $\delta = 10^{-5}$  der Abstand  $d - d'$  auch erst etwa  $10 \mu$  wird<sup>1</sup>.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß Gl. (65) zusammen mit (56) für die Randfeldstärke  $\mathfrak{E}(d)$  den Wert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(d) &= -V'(d) = -\sqrt{2} \frac{\mathfrak{B}}{x_{0n}} \sqrt{e^{-1} + 1 - 1} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{e}} \frac{\mathfrak{B}}{x_{0n}} \end{aligned} \quad (70)$$

ergibt.

$\mathfrak{E}(d)$  wird also durch die Dotierung der hochdotierten Bereiche bestimmt. Für eine Dotierung von z. B.  $n_{D+} = 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  wird  $x_{0n} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$  und

$$\mathfrak{E}(d) = -7 \cdot 10^4 \text{ Volt cm}^{-1} . \quad (71)$$

Wir erwähnten soeben, daß die Randfeldstärke  $\mathfrak{E}(d)$  nur die Dotierung  $n_{D+}$  enthält. Das Gleiche gilt aber nicht nur für die Anfangstangente, sondern für den ganzen Potentialverlauf im hochdotierten Gebiet. Ebenso sind schließlich die Elektronenkonzentration  $n(x)$ , die Raumladungsdichte  $\rho(x) = e(n_{D+} - n(x))$

und die gesamte Raumladung  $\int_{x=+d}^{\infty} \rho(x) dx$  im hochdotierten Gebiet von  $n_i$  unabhängig. Da die gesamte Raumladung im eigenleitenden Gebiet gleich der im hochdotierten Gebiet sein muß<sup>2</sup>, gilt die Unabhängigkeit von  $n_i$  schließlich auch für die gesamte Raumladung im eigenleitenden Gebiet. Das alles mag auf den ersten Blick etwas befremden. Denn der insgesamt aufzubauende Potentialunterschied  $V_D = \mathfrak{B} \ln \frac{n_{D+}}{n_i}$  hängt ja sehr wohl von  $n_i$  ab. Der scheinbare Widerspruch läßt sich durch die Bemerkung aufklären, daß mit der gleichen Gesamtraumladung ganz verschiedene Potentialdifferenzen aufgebaut werden können, je nachdem ob die Ladung auf engem Raum oder über große Strecken diffus verteilt wird. Die Gesamtladung im undotierten Gebiet wird durch  $\int_{-\infty}^{+d} \rho(x) dx$  gemes-

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 2 auf Seite 104.

<sup>2</sup> Es handelt sich hier um eine diffuse Doppelschicht, die aber in toto neutral sein muß, damit  $V'(-\infty) = V'(+\infty)$  ist. Beide Gradienten müssen im Rahmen der vorgenommenen Näherungen nämlich verschwinden.



a, also in einem  $\varrho, x$ -Diagramm durch die Fläche; die mit gegenüber dem Punkt  $x = +d$  aufgebaute Potentialdifferenz  $V(-\infty) - V(+d)$  ist jedoch durch 
$$-\int_{+\infty}^{-\infty} (x-d) \varrho(x) dx$$
, also bis auf den Faktor  $\frac{4\pi}{\epsilon}$  durch das Moment dieser Fläche  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x) dx$  gegenüber der Achse  $x = d$  bestimmt<sup>1</sup>.

Im übrigen treten die erwähnten Unabhängigkeiten von  $n_i$  alle erst im Grenzfall  $n_{D+} \gg n_i$  ein. Freilich ließe eine Berücksichtigung der nächsten Ordnung bei näherungsweise Auflösung von (57) für die Rand-

<sup>1</sup> S. hierzu vielleicht [14], namentlich § 2.

Als Potentialdifferenz zwischen einer im endlichen gegebenen Grenze der BOLTZMANN-Zone bei  $x = d'$  und der Döringergrenze bei  $x = d$  erhält man durch Integration der Poisson'schen Gleichung allgemein

$$V(d') - V(d) = + \frac{4\pi}{\epsilon} \int_{x=d}^{x=d'} (x-d) \varrho(x) dx + \mathcal{E}(d')(d-d').$$

[Man prüft diese Gleichung am besten durch Differentiation nach  $d'$  unter Benutzung von  $V'(d') = -\mathcal{E}(d')$  und  $\frac{4\pi}{\epsilon} \varrho(d') = \mathcal{E}'(d')$  (POISSON'sche Gleichung).]

Im unbelasteten Gleichrichter und bei dem im folgenden Kap. IV behandelten Fall der Durchlaßbelastung und schwachen Sperrbelastung ist der lineare Anteil  $\mathcal{E}(d')(d-d')$  wegen  $\mathcal{E}(d') \approx \mathcal{E}(-\infty) = 0$  bedeutungslos. Im Fall hoher Sperrbelastung (Kap. V) wird er aber wichtig werden. Die oben angestellten Überlegungen gelten dann nicht mehr.

feldstärke

$$\mathcal{E}(d) = -\sqrt{\frac{2}{e}} \frac{\mathfrak{B}}{x_{0n}} \left( 1 - (e-1) \cdot \frac{n_i}{n_{D+}} \right), \quad (72)$$

so daß das Korrekturglied bei den praktisch vorliegenden Werten  $\frac{n_i}{n_{D+}} < 10^{-3} \dots 10^{-5}$  gar nichts mehr ausmacht. (Fortsetzung folgt in Heft 3, 1955).

**Literatur.** [1] HALL, R. N. und W. C. DUNLAP: Phys. Rev. **80**, 467 (1950). — [2] LAW, R. R., C. W. MUELLER, J. I. PANKOVE und L. D. ARMSTRONG: Proc. I. R. E. **40**, 1352 (1952). — [3] SABY, J. S. und W. C. DUNLAP: Phys. Rev. **90**, 630 (1953). — [4] PRIM, R. C.: Bell Syst. Techn. Journ. **XXXII**, 665 (1953). — [5] SHOCKLEY, W.: Bell Syst. Techn. Journ. **XXVIII**, 435 (1949). — [6] HALL, R. N.: Proc. I. R. E. **40**, 1512 (1952). — [7] RYDER, E. J. und W. SHOCKLEY: Phys. Rev. **81**, 139 (1951). — [8] RYDER, E. J.: Phys. Rev. **90**, 766 (1953). — [9] SHOCKLEY, W.: Bell Syst. Techn. Journ. **XXX**, 990 (1951). — [10] SPENKE, E.: Elektronische Halbleiter, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag: 1955. — [11] HALL, R. N.: Phys. Rev. **87**, 387 (1952). — [12] BURTON, J. A., G. W. HULL, F. J. MORIN, J. C. SEVERIENS: Journ. Phys. Chem. **57**, 853 (1953). — [13] SHOCKLEY, W. und W. T. READ: Phys. Rev. **87**, 835 (1952). — [14] SPENKE, E.: Z. f. Naturf. **4a**, 37 (1949). — [15] HOFFMANN, A.: Beitrag „Lebensdauerfragen und Trapmodell“ in Halbleiterprobleme II, herausgegeben von W. SCHOTTKY, Friedr. Vieweg & Sohn, erscheint 1955. — [16] SHOCKLEY, W.: Electrons and Holes in Semiconductors D. van Nostrand Company, Inc. (1950). — [17] EMDE, F.: Tafeln elementarer Funktionen, Leipzig, G. B. Teubner Verlagsgesellschaft 1948. — [18] HERLET, A.: Z. angew. Phys. erscheint in Kürze.

Dr. ADOLF HERLET und Dr. EBERHARD SPENKE  
Siemens-Schuckertwerke AG, Laboratorium Pretzfeld.

## Buchbesprechungen.

Fünfer, E. und H. Neuert: Zählrohre und Szintillationszähler. Karlsruhe: Braun 1954, 273 S., 173 Abb. u. 27 Tabellen. Geb. DM 29.60.

Die Zählmethoden für Teilchen- und Photonenstrahlungen von radioaktiven Substanzen haben über die Physik hinaus auch in anderen Wissenschaften wie Medizin, Biologie, Chemie, Geologie usw. und in der Technik allgemeines Interesse erzeugt. Die Verfasser haben es mit bestem Erfolg unternommen, eine möglichst vollständige und systematische Darstellung des Entwicklungsstandes dieser Methoden und einen kritischen Überblick über die ungemein umfangreiche Originalliteratur zu geben. Sie bringen zunächst einen kurzen historischen Überblick und erläutern dann bis ins Einzelne gehend und in leicht verständlicher Weise die physikalischen Vorgänge bei Proportional-, Auslöse-, Szintillations- und Kristallzählern. Es folgen Abschnitte über die Technik der Herstellung von Zählrohren, über die Gasfüllungen und über die für die verschiedensten Zwecke gebräuchlichen Zählrohrtypen, insbesondere auch über Neutronenzähler. Weiterhin werden, unterstützt durch zahlreiche Tabellen und Diagramme wichtige Unterlagen gegeben über Zählstatistik für gewöhnliche und Koinzidenzmessungen, über die Wechselwirkungen der Strahlung mit Materie, über die Physik der Gasentladungen, über Strahlungs- und Strahlungsdosis-Einheiten. Zum Abschluß wird eine Auswahl der bekanntesten Elektronen-Röhrenschaltungen besprochen, welche in Verbindung mit den Zählern für die verschiedensten Zwecke entwickelt worden sind. Soweit wie möglich ist dabei die Dimensionierung der Schaltelemente angegeben, um den Nachbau zu erleichtern.

Zahlreiche Zitate im Text und Literatur-Zusammenstellungen am Ende jedes Abschnittes zeigen den Weg zu den Originalarbeiten. Die Monographie füllt eine bisher in der deutschen wissenschaftlichen Literatur bestehende Lücke aus und wird sicher von vielen, die an radioaktiven Messungen interessiert sind, dankbar begrüßt werden. H. EWALD.

Neubert, U.: Elektrostatik in der Technik. 194 S. u. 168 Abb. München: R. Oldenbourg 1954. Brosch. DM 19.80, geb. DM 24.—.

Bei dem vorliegenden Buch handelt es sich um eine Neuauflage eines 1942 im gleichen Verlag erschienenen Werkes über „Elektrostatische Generatoren“ von U. NEUBERT. Da sich das Gebiet der elektrostatischen Generatoren und ihre Anwendungen seit 1942 wesentlich erweitert hat, sind vom Verfasser entsprechende Ergänzungen vorgenommen worden, was auch in dem allgemeiner gefaßten Titel zum Ausdruck kommen soll.

Der Verfasser bringt zunächst in Kap. 1 eine systematische Einführung in die elektrostatischen Grundgesetze und in Kap. 2 die entsprechenden Meßmethoden, wobei ausführlich die Potentialwaage, das Multizellularrvoltmeter, das Rotations- und Schwingvoltmeter besprochen werden. Weitere Methoden, wie etwa Elektronenbeugung und Ablenkung von Teilchen im Magnetfeld werden kurz erwähnt. Im 3. Kapitel werden die älteren elektrostatischen Scheibengeneratoren behandelt, z. B. die Ausführungen von WOMMELSDORF, HOLTZ und TOEFLER. Die modernen Weiterentwicklungen dieser Maschinen, die zum wesentlichen Teil der Schule von KOSSEL zu verdanken ist, findet man in Kapitel 6, wobei natürlich die Fortschritte der jüngsten Zeit nicht mehr berücksichtigt werden konnten.

Entsprechend der Bedeutung, die der Bandgenerator heute insbesondere in der Kernphysik einnimmt, ist diesem Thema ein breiter Raum gewidmet. Kapitel 4 bringt eine ausführliche Einführung in die Grundprinzipien. Es werden die Fragen der erreichbaren Spannung, der Beladungsdichte des Bandes, die Verbesserung durch Erhöhung des Drucks bzw. durch Verwendung spezieller Gase diskutiert. Man findet dort auch genauere Angaben über die Möglichkeiten zur Spannungskonstanthaltung, was ja gerade in der Kernphysik von großer Wichtigkeit ist. Kurz erwähnt sind



auch Staubgenerator und Generator mit Kondensatorband.

Nur kurz angedeutet werden in Kapitel 5 Aufbau von Entladungsröhren und Anwendungsmöglichkeiten der Bandgeneratoren. In sehr konzentrierter Form bringt dann Kapitel 7 einen Überblick über technische Anwendungen moderner Rotor- und Scheibenmaschinen. Von den im Untertitel des Buches genannten 3 Themen „Geräte, Maschinen, Anwendungen“, sind die Anwendungen vielleicht etwas zu kurz gekommen. Ausführlich behandelt werden dagegen im Anhang (Kapitel 8) alle wesentlichen Ausführungsformen von Bandgeneratoren.

Alle, die sich mit dem Bau und der Anwendung elektrostatischer Generatoren beschäftigen, werden dem Verfasser dankbar sein, daß er aus der großen Zahl von einzelnen Veröffentlichungen und aus seinen eigenen praktischen Erfahrungen in der Entwicklung und im Bau dieser Geräte eine so übersichtliche und klare Zusammenfassung gegeben hat.

EWALD FÜNFER.

**Krbek, F. v.: Grundzüge der Mechanik, Lehren von Newton, Einstein, Schrödinger.** Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1954. 184 S. u. 3 Abb. Geb. DM 15.—.

Es handelt sich um ein äußerst knapp gehaltenes Lehrbuch der nichtrelativistischen und der relativistischen klassischen Mechanik und der nichtrelativistischen Wellenmechanik, die nacheinander auf je 30 bis 40 Seiten dargestellt werden. Besonderer Wert wird auf die Begriffsbildung und den logischen und axiomatischen Aufbau der Mechanik gelegt, wodurch die Unterschiede in den Grundlagen der 3 Disziplinen besonders deutlich gemacht werden. Die Darstellung ist sehr eigenwillig und weicht vielfach vom üblichen ab.

Auf diese systematischen Teile folgt, etwa ein Viertel des Buches einnehmend, eine „historisch-kritische Schau“. Hier schildert der Verfasser an Hand von zahlreichen teilweise recht umfangreichen Zitaten aus der historischen und modernen Literatur die Entwicklung der mechanischen Begriffe, Axiome und Prinzipien und begründet die von ihm in den vorangegangenen Text aufgenommenen Definitionen und Ableitungen in denjenigen Fällen, in denen in der bisherigen Literatur keine Übereinstimmung besteht oder der Verfasser Verbesserungen oder Ergänzungen für notwendig hält. Wenn auch der Referent nicht in allen Fällen den Argumenten des Verfassers folgen kann, so ist diese historisch kritische Schau doch von hohem Interesse, da sie fast als eine bis zur Gegenwart reichende Geschichte und Kritik der Grundprinzipien der Mechanik angesehen werden kann.

Überhaupt sieht der Referent den Hauptwert des Buches in dieser seiner kritischen Einstellung. Es ist daher — auch schon seiner Kürze wegen — weniger dem Anfänger als Lehrbuch als dem Fortgeschrittenen zu empfehlen, der sich für die historische Entwicklung und für die Strenge der grundlegenden Definitionen und Ableitungen der Mechanik interessiert.

G. HETTNER.

**Hund, F.: Materie als Feld.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. 418 S. u. 40 Abb. Ganzl. DM 52.—.

Das vorliegende Buch bietet eine umfassende Übersicht über die Quantentheorie der Wellenfelder, wobei vor allem das Wellenbild der Materie behandelt wird. Der Verfasser stellt zunächst klar heraus, wieviel schon eine klassische Feldtheorie zu leisten vermag und welche Züge erst durch die Quantisierung hinzukommen. Dementsprechend ist der Aufbau des Buches rein induktiv — im Gegensatz etwa zu WENTZELS „Quantentheorie der Wellenfelder“. Stets werden die Wege aufgezeigt, auf denen sich die gewünschten Eigenschaften (Atomismus, Ladung, Spin) ergeben, wobei die originelle Darstellung viele eigene Gedankengänge erkennen läßt. So wird man vor allem die späteren Kapitel (z. B. Quantentheorie der Mechanismen; Allgemeine Feldtheorie; Verknüpfung von Materiearten) mit hohem Interesse lesen und dabei einen ausgezeichneten Einblick in die Methoden der Theorie gewinnen. Dagegen birgt der einleitende Teil, der einen Abriss der klassischen Feldtheorien und der gewöhnlichen Quantenmechanik bringt, infolge seiner Weitläufigkeit vielleicht die Gefahr in sich, daß der Anfänger er-

müdet, bevor er zum wesentlichen vorgedrungen ist. Andererseits würde es wohl mancher begnügen, wenn in einem Werke dieses Umfangs auch die Divergenzschwierigkeit und die Versuche ihrer Behebung (Renormierung) behandelt würden. Diese Bemerkungen sollen jedoch den Wert des Buches in keiner Weise schmälern. Jeder, der sich mit diesen modernen Gebieten der Physik beschäftigt, wird aus ihm reichliche Belehrung und eine Fülle von Anregungen empfangen.

A. HAUG.

**Kaufmann, W.: Technische Hydro- und Aeromechanik.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. 352 S. u. 254 Abb. Geb. DM 36.—.

Das 1931 und 1934 erschienene Lehrbuch des Verfassers „Angewandte Hydrodynamik“ ist seit langem vergriffen. Angesichts der großen Fortschritte, die die Strömungslehre seit dem Erscheinen dieses Buches gemacht hat, hat der Verfasser nicht eine neue Auflage herausgegeben, sondern das jetzt vorliegende neue Buch geschrieben, in das allerdings wesentliche Teile der „Angewandten Hydrodynamik“ übernommen sind.

Auf einen kurzen Abschnitt über die Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase folgt die Hydro- oder Aerostatik und dann, den wesentlichen Teil des Buches einnehmend, die Hydro- oder Aerodynamik. Dieser Abschnitt zerfällt in folgende Teile: Eindimensionale Strömung inkompressibler Flüssigkeiten ohne und mit Berücksichtigung der Zähigkeit; das entsprechende für 2 und 3-dimensionale Strömungen, einschließlich der Gasdynamik, d. h. der Dynamik kompressibler Flüssigkeiten. Jeder Teilabschnitt bringt zunächst die allgemeine Theorie und dann einige Anwendungsbeispiele. Während aber die Abschnitte über inkompressible Flüssigkeiten die grundlegenden Gedankengänge einigermaßen vollständig enthalten, konnte der Verfasser von dem großen neuen Gebiet der Gasdynamik nur einen gewissen Ausschnitt bringen, der dem Leser wenigstens in den einfacheren Fällen die Eigentümlichkeiten der Unter- und Überschallströmungen von Gasen vor Augen führt.

Die Darstellung ist überall ausführlich und elementar. Der Aufwand an Mathematik beschränkt sich im wesentlichen auf Infinitesimalrechnung und die elementaren Funktionen. Von der Vektoranalysis wird nur sehr sparsam Gebrauch gemacht, die Ableitungen erfolgen oft in Koordinaten auch da, wo vielleicht die Vektorschreibweise selbst für den Anfänger die Übersichtlichkeit erhöht hätte.

So ist ein für Studierende der Physik und der Technik leicht verständliches und recht umfassendes Lehrbuch entstanden, das auch dem fertigen Ingenieur mit Hilfe der zahlreichen zitierten Literatur bei der Lösung spezieller Aufgaben den Weg zu weisen geeignet ist.

G. HETTNER.

**Flügge, J.: Einführung in die Messung der optischen Grundgrößen.** Karlsruhe: Verlag C. Braun 1954. XI, 220 u. 147 Abb. DM 24.—.

In diesem Buch wird die Messung der Größen behandelt, welche für die Konstruktion optischer Geräte und ihrer Fertigung von Bedeutung sind. Nicht einverstanden erklären kann sich der Bericht mit der Einführung des besonderen Begriffes „technisches Messen“ in der Einleitung. Was darüber gesagt ist, versteht sich für jede wissenschaftliche Messung von selbst. Von den einleitenden Kapiteln ist das über die Eigenschaften des Auges, die man sonst nur selten übersichtlich zusammengestellt findet, besonders wertvoll. Bei der kurzen Darstellung der Gesetze der geometrischen Optik wird die fundamentale Beziehung zwischen Winkelgrößen und unendlich ferner Dinge und Bildgröße, die erfahrungsgemäß dem Verständnis die größten Schwierigkeiten bereitet, am Rande erwähnt und mit der Sinus-Bedingung für unendlich ferne Objekte verquickt. In den eigentlich mechanischen Kapiteln sind die klassischen Meßmethoden von Krümmungsradien, Keilwinkeln, Brechzahlen, Brennweiten und Pupillen usw. gründlich und klar dargestellt. Das Buch beschränkt sich aber auf die Grundstufe: Messungen von Linsenfehlern, Lichtdurchlässigkeit, Streulicht, Kontrast usw. liegen außerhalb des Rahmens. Es wäre zu wünschen, daß diesen Fragen ein 2. Band gewidmet würde. Für die Grundstufe ist das Werk ein vorzügliches Hilfsbuch der optischen Meßtechnik.

G. JOOS.